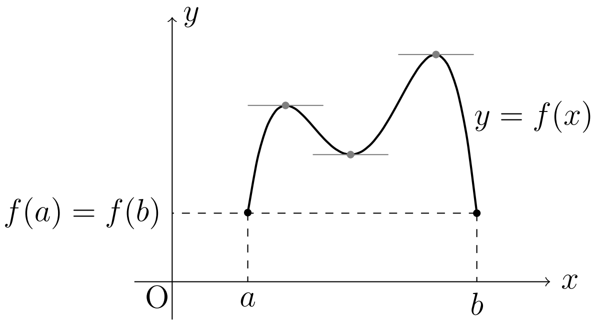
ロルの定理

ある区間 $[a,b]$ において，途切れておらず滑らかな曲線 $y=f(x)$ が，$f(a)=f(b)$ を満たしているとする．このとき，その区間内で，接線が x 軸と平行になるような点が存在するというのは，右図のように直感的には明らかであろう．ロルの定理はこのことを主張する．定理の主張を厳密に述べると次のようになる．



定理 (ロルの定理). 関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a,b]$ で連続であり，開区間 (a,b) で微分可能であるとする．このとき，$f(a)=f(b)$ ならば，

$$f'(c)=0, \qquad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する．

証明. $f(x)$ が定数関数でないとする．$f(x)$ は連続なので，最大値・最小値の原理[1]から，閉区間 $[a,b]$ における最大値と最小値が存在するので，それらをそれぞれ M,m とする．定数関数ではないという仮定から，M,m の少なくとも 1 つは，$f(a)=f(b)$ と異なる．

- $M\neq f(a)=f(b)$ のとき，
$$M=f(c), \qquad a<c<b$$
を満たす実数 c が存在する．このとき十分小さい $h>0$ に対して，M が最大値であったから，$M=f(c)\geq f(c+h)$ が成り立つ．これから，
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$
が成り立ち，微分可能であるという仮定から，
$$f'(c)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0 \tag{1}$$
が従う．一方，上と同様にして，$M=f(c)\geq f(c-h)$ が成り立ち，これから，
$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\geq 0$$
なので，
$$f'(c)=\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\geq 0 \tag{2}$$
が従う．(1), (2) を合わせて，$f'(c)=0$ が成り立つ．この実数 c が求めるものであった．
- $m\neq f(a)=f(b)$ のとき，$m=f(c), a<c<b$ を満たす実数 c が存在する．上と同様に右側微分係数と左側微分係数を比較することで，$f'(c)=0$ が従う．

$f(x)$ が定数関数であれば，開区間 (a,b) 内の任意の x に対して，$f'(x)=0$ が成り立つので，この場合は明らかに主張が従う． □

[1]関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続なら，$f(x)$ の $[a,b]$ における最大値・最小値が存在する．