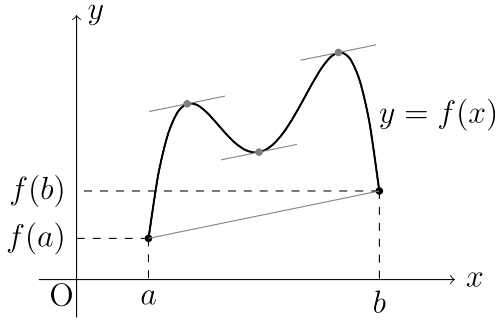
平均値の定理

ある区間 $[a, b]$ において，途切れておらず滑らかな曲線 $y = f(x)$ の平均変化率を k とする．このとき，その区間内で，接線の傾きが k であるような点が存在するというのが平均値の定理である．$k = 0$ のときは，ロルの定理[1] そのものであるが，平均値の定理は，ロルの定理を用いて証明される．定理の主張を厳密に述べると次のようになる．



定理 (平均値の定理)．関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．このとき，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する．

証明．$k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とし，

$$F(x) = f(x) - k(x - a)$$

とおくと，$f(x)$ の連続性と微分可能性の仮定から，$F(x)$ も，閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 (a, b) で微分可能である．さらに，

$$F(a) = f(a) - k(a - a) = f(a), \qquad F(b) = f(b) - k(b - a) = f(a)$$

が成り立つので，$F(a) = F(b)$ である．よって，関数 $F(x)$ はロルの定理[1] の仮定を満たす．よって，ロルの定理から，

$$F'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する．ここで，$F'(x) = f'(x) - k$ なので，上と合わせて，

$$0 = F'(c) = f'(c) - k$$

が成り立ち，これから，

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が従う．この c が求めるものであった． □

[1] ロルの定理．

関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．このとき $f(a) = f(b)$ なら，

$$f'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する．

平均値の定理は次の形で用いられることもある．平均値の定理が区間 $[a, b]$ に対して述べられているのに対して，次の系は，点 a を基準とした幅 h の区間に対して述べたものである．

系 (平均値の定理). $h > 0$ とする．関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a, a+h]$ で連続であり，開区間 $(a, a+h)$ で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+h\theta), \qquad 0 < \theta < 1$$

を満たす実数 θ が存在する．

証明. 平均値の定理の主張において，

$$b - a = h \iff b = a + h$$

とおくと，$f(x)$ の仮定は同じであることがわかる．よって，平均値の定理から，

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad a < c < a + h$$

を満たす実数 c が存在する．この等式を変形すると，等式

$$f(a+h) = f(a) + hf'(c)$$

を得るが，c は，区間 $(a, a+h)$ 内の点なので，ある実数 θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して，

$$c = a + h\theta$$

と書ける．よって，主張の形

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+h\theta), \qquad 0 < \theta < 1$$

を得る． □

さらに平均値の定理は，点 a を基準として左側の区間，すなわち，$h < 0$ としたときの区間 $[a+h, a]$ に対しても成り立つ．

系 (平均値の定理). $h < 0$ とする．関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a+h, a]$ で連続であり，開区間 $(a+h, a)$ で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+h\theta), \qquad 0 < \theta < 1$$

を満たす実数 θ が存在する．

証明. 平均値の定理から，

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(a+h)}{a - (a+h)} = \frac{f(a) - f(a+h)}{-h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を満たす $c \in (a+h, a)$ が存在する．上と同様に，ある実数 θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して，$c = a + h\theta$ と書けることと合わせて，主張の形を得る． □