三角不等式

次の不等式は，三角不等式と呼ばれる．

命題. 実数 a, b に対して，次が成り立つ．

1. $|a+b| \leq |a|+|b|$　　等号成立は，$ab \geq 0$ すなわち，a と b が同符号のときである．
2. $||a|-|b|| \leq |a+b|$　　等号成立は，$ab \leq 0$ すなわち，a と b が異符号のときである．

証明. どちらの不等式も a と b の少なくとも一方が 0 であるとき，明らかに等号が成立するので，この場合は良い．

1. $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ なので，下の補題から，2 乗してこれらの大小を比較すればよい．すなわち，$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \geq 0$ を示せば良い．実数 A に対して $|A|^2 = A^2$ に注意すると，

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab)\end{aligned}$$

と計算でき，

$$|ab| - ab \geq 0 \tag{1}$$

が成り立つことから，結果が従う．また，不等式 (1) の等号成立条件が $ab \geq 0$ であることから，命題の等号成立条件も従う．

2. $||a|-|b|| \geq 0, |a+b| \geq 0$ なので，下の補題から，2 乗してこれらの大小を比較すればよい．すなわち，$|a+b|^2 - ||a|-|b||^2 \geq 0$ を示せば良い．実数 A に対して $|A|^2 = A^2$ に注意すると，

$$\begin{aligned}|a+b|^2 - ||a|-|b||^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2) \\ &= 2(ab + |ab|)\end{aligned}$$

と計算でき，

$$ab + |ab| \geq 0 \tag{2}$$

が成り立つことから，結果が従う．また，不等式 (2) の等号成立条件が $ab \leq 0$ であることから，命題の等号成立条件も従う．

□

注意. 実数 a, b に対して，$|a|-|b| \leq ||a|-|b||$ が成り立つので，上の命題から，次が成り立つ．

$$|a| - |b| \leq |a+b|$$

. . . .

補題. 実数 A, B に対して，$A \geq 0, B \geq 0$ のとき，次が成り立つ．

$$A^2 \geq B^2 \iff A \geq B$$

証明. $(\Leftarrow)$ は明らかなので，$(\Rightarrow)$ を示す．仮定から，$A^2 - B^2 \geq 0$ が成り立つので，

$$0 \leq A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

であり，今，$A+B \geq 0$ なので，$A-B \geq 0$ が従う．よって，$A \geq B$ である． □

三角不等式を一般化した次の不等式が成り立つ．

命題. 実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，次が成り立つ．

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

等号成立は，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が全て同符号のときである．

証明. 数学的帰納法で証明する．$n = 2$ のときは，上の命題（三角不等式）より成立が確認できる．$n = k$ のとき，命題の主張が成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときを考える．仮定の不等式

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$$

の両辺に $|a_{k+1}|$ を加えると，

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}| \tag{3}$$

が成り立ち，左辺は，$n = 2$ の場合の三角不等式を用いることで，次のように評価することができる．

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \tag{4}$$

よって，不等式 (3)，(4) を合わせることで主張が従う．

不等式 (3) の等号成立条件は，$n = k$ のときの仮定から，

$$a_1, \cdots, a_k \text{ が全て同符号のとき}$$

であり，不等式 (4) の等号成立条件は，$n = 2$ の場合の三角不等式の等号成立条件から，

$$a_1 + \cdots + a_k \text{ と } a_{k+1} \text{ が同符号のとき}$$

である．これらを合わせたものが，$n = k + 1$ のときの等号成立条件であり，それは，

$$a_1, \cdots, a_{k+1} \text{ が全て同符号のとき}$$

となるので，この場合の等号成立条件も従う．　□

補足. 三角不等式は，複素数 α, β に対しても成り立つ．すなわち，次が成り立つ．

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \tag{5}$$

複素数 α の絶対値は，$|\alpha| = \sqrt{\{\mathrm{Re}(\alpha)\}^2 + \{\mathrm{Im}(\alpha)\}^2}$ と定義されるが，これは，複素数平面における原点と点 α の距離と見ることができる．このように，複素数平面において，不等式 (5) の幾何学的意味を考えることにより，この不等式が三角不等式と呼ばれる理由がわかる．