三角形の重心の位置ベクトル

三角形があれば，その重心[1]が存在する．よって，三角形の 3 頂点の位置ベクトルを用いて，重心の位置ベクトルを表すことができる．

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とする．このとき，

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \tag{1}$$

が成り立つ．

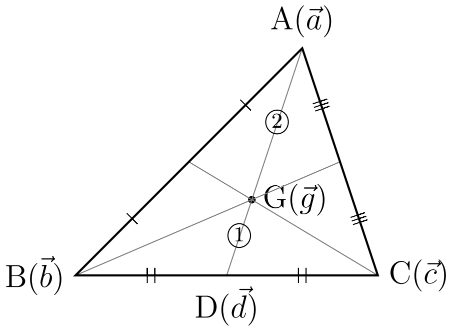
証明. 線分 BC の中点を $\mathrm{D}(\vec{d})$ とすると，

$$\vec{d} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

が成り立つ．重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は，線分 AD を $2:1$ に内分する点なので，

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3} = \frac{\vec{a}+2\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

を得る． □



位置ベクトルを定める基準点を重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ にとることで，次の結果が得られる．

$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0} \tag{2}$$

が成り立つ．逆に，等式 (2) を満たす点 G は，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心である．

証明. 位置ベクトルを定める基準点を重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ にとると，

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{GA}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{GB}},\ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{GC}},\ \vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{GG}} = \vec{0}$$

である．これと，等式 (1) と合わせて，等式 (2) が得られる．

逆を示す．点 G′ を，

$$\overrightarrow{\mathrm{G'A}} + \overrightarrow{\mathrm{G'B}} + \overrightarrow{\mathrm{G'C}} = \vec{0}$$

を満たす点とする．左辺は，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{G'A}} + \overrightarrow{\mathrm{G'B}} + \overrightarrow{\mathrm{G'C}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{G'G}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{G'G}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{G'G}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) = 3\overrightarrow{\mathrm{G'G}}$$

と計算できる．ここで，重心を G に対しては，等式 (2) が成り立つことを用いた．以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{G'G}} = \vec{0}$$

が成り立つので，G と G′ は同じ点であることが従う． □

[1] 三角形の 3 本の中線（頂点から対辺の中点へ引いた線）の交点を重心という．重心は，各中線を（頂点から）$2:1$ に内分する点である．