三角形の垂心の位置ベクトル

三角形があれば，その垂心[1]が存在する．よって，三角形の 3 頂点の位置ベクトルを用いて，垂心の位置ベクトルを表すことができる．本稿では，加重重心の結果[2]を用いて，垂心の位置ベクトルの美しい表示を与える．以下では，$\tan\angle\mathrm{A}$ のことを $\tan\mathrm{A}$ と表す．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積や，辺 BC の長さもまた，$\triangle\mathrm{ABC}$ や BC などという記号で表す．

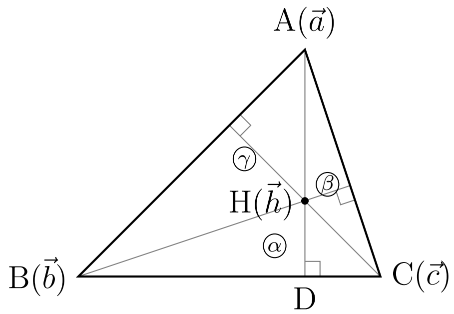
命題． 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を $\mathrm{H}(\vec{h})$ とする．このとき，

$$\vec{h} = \frac{(\tan\mathrm{A})\vec{a} + (\tan\mathrm{B})\vec{b} + (\tan\mathrm{C})\vec{c}}{\tan\mathrm{A} + \tan\mathrm{B} + \tan\mathrm{C}} \tag{1}$$

が成り立つ．ただし，$\triangle\mathrm{ABC}$ は直角三角形ではないとする．

証明．まずは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であると仮定する．

このとき，垂心 H は三角形の内部に存在する．$\triangle\mathrm{BHC}, \triangle\mathrm{CHA}, \triangle\mathrm{AHB}$ の面積比を $\alpha : \beta : \gamma$ とすると，加重重心の結果から，垂心 H の位置ベクトルは，



$$\vec{h} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

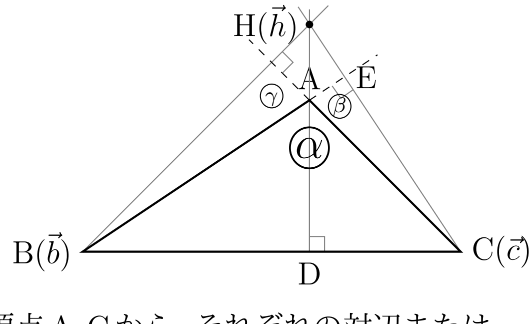
と表せる．

$\alpha : \beta : \gamma = \tan\mathrm{A} : \tan\mathrm{B} : \tan\mathrm{C}$ であることを示す．頂点 A から，辺 BC に下ろした垂線の足を D とすると，$\mathrm{BD}\cdot\tan\mathrm{B} = \mathrm{AD} = \mathrm{CD}\cdot\tan\mathrm{C}$ が成り立つので，

$$\beta : \gamma = \mathrm{CD} : \mathrm{BD} = \tan\mathrm{B} : \tan\mathrm{C} \tag{2}$$

が成り立つ．他も同様に考えることにより，$\alpha : \beta : \gamma = \tan\mathrm{A} : \tan\mathrm{B} : \tan\mathrm{C}$ が従う．

次に，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鈍角三角形である場合を考える．どこでも一緒なので，$\angle\mathrm{A}$ が鈍角であるとする．このとき，垂心 H は三角形の外部の右図のような位置に存在する．$\triangle\mathrm{BHC}, \triangle\mathrm{CHA}, \triangle\mathrm{AHB}$ の面積比を $\alpha : \beta : \gamma$ とすると，再び，加重重心の結果から，垂心 H の位置ベクトルは，



$$\vec{h} = \frac{-\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{-\alpha + \beta + \gamma}$$

と表せる．

$\alpha : \beta : \gamma = -\tan\mathrm{A} : \tan\mathrm{B} : \tan\mathrm{C}$ であることを示す．頂点 A, C から，それぞれの対辺またはその延長線に下ろした垂線の足を D, E とすると，辺 BC 上の点 D については，上と同様に (2) が成り立つ．また，辺 AB の延長線上の点 E に関しても，同様に，$\mathrm{AE}\cdot\tan(\pi - \mathrm{A}) = \mathrm{CE} = \mathrm{BE}\cdot\tan\mathrm{B}$ が成り立つので，

$$\alpha : \beta = \mathrm{BE} : \mathrm{AE} = \tan(\pi - \mathrm{A}) : \tan\mathrm{B} = -\tan\mathrm{A} : \tan\mathrm{B} \tag{3}$$

が成り立つ．よって，$\alpha : \beta : \gamma = -\tan\mathrm{A} : \tan\mathrm{B} : \tan\mathrm{C}$ が従う．　□

注意． 垂心の定義から，$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ である直角三角形 ABC における垂心は，頂点 A に一致する．

---

[1] 三角形の各頂点から，その対辺または延長線に下ろした垂線の交点を垂心という．

[2] 加重重心の拡張 https://gleamath.com/weighted-center02/