三角形の外心の位置ベクトル

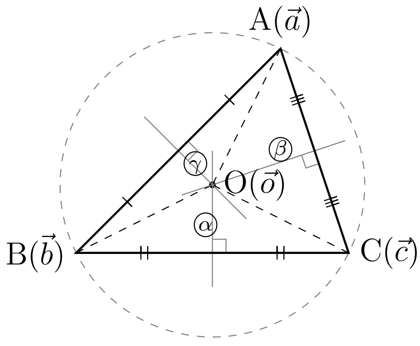
三角形があれば，その外心[1]が存在する．よって，三角形の 3 頂点の位置ベクトルを用いて，外心の位置ベクトルを表すことができる．本稿では，加重重心の結果[2]を用いて，外心の位置ベクトルの美しい表示を与える．以下では，$\sin(2\times\angle\mathrm{A})$ のことを $\sin 2\mathrm{A}$ と表し，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積もまた，$\triangle\mathrm{ABC}$ で表す．

命題. 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\mathrm{B}(\vec{b}),\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を $\mathrm{O}(\vec{o})$ とする．このとき，

$$\vec{o}=\frac{(\sin 2\mathrm{A})\vec{a}+(\sin 2\mathrm{B})\vec{b}+(\sin 2\mathrm{C})\vec{c}}{\sin 2\mathrm{A}+\sin 2\mathrm{B}+\sin 2\mathrm{C}} \tag{1}$$

が成り立つ．

証明. まずは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であると仮定する．このとき，外心 O は三角形の内部に存在する．$\triangle\mathrm{BOC},\triangle\mathrm{COA},\triangle\mathrm{AOB}$ の面積比を $\alpha:\beta:\gamma$ とすると，加重重心の結果から，外心 O の位置ベクトルは，



$$\vec{o}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

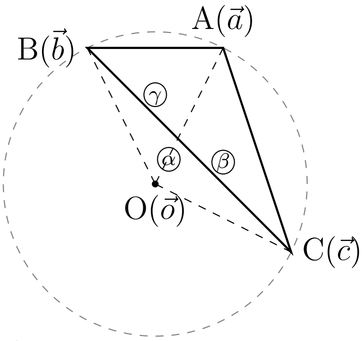
と表せる．

$\alpha:\beta:\gamma=\sin 2\mathrm{A}:\sin 2\mathrm{B}:\sin 2\mathrm{C}$ であることを示す．円周角の定理から，$\angle\mathrm{BOC}=2\mathrm{A}$ なので，外接円の半径を R とすると，$\triangle\mathrm{BOC}=\dfrac{R^2\sin 2\mathrm{A}}{2}$ が成り立つ．他の小三角形に関しても同様に考えることで，

$$\alpha:\beta:\gamma=\frac{R^2\sin 2\mathrm{A}}{2}:\frac{R^2\sin 2\mathrm{B}}{2}:\frac{R^2\sin 2\mathrm{C}}{2}=\sin 2\mathrm{A}:\sin 2\mathrm{B}:\sin 2\mathrm{C} \tag{2}$$

が成り立つ．

次に，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鈍角三角形である場合を考える．どこでも一緒なので，$\angle\mathrm{A}$ が鈍角であるとする．このとき，外心 O は三角形の外部の右図のような位置に存在する．$\triangle\mathrm{BOC},\triangle\mathrm{COA},\triangle\mathrm{AOB}$ の面積比を $\alpha:\beta:\gamma$ とすると，再び，加重重心の結果から，外心 O の位置ベクトルは，



$$\vec{o}=\frac{-\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{-\alpha+\beta+\gamma}$$

と表せる．

$\alpha:\beta:\gamma=-\sin 2\mathrm{A}:\sin 2\mathrm{B}:\sin 2\mathrm{C}$ であることを示す．円周角の定理から，$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-2\mathrm{A}$ なので，外接円の半径を R とすると，$\triangle\mathrm{BOC}=\dfrac{R^2\sin(360^\circ-2\mathrm{A})}{2}=-\dfrac{R^2\sin 2\mathrm{A}}{2}$ が成り立つ．$\triangle\mathrm{COA},\triangle\mathrm{AOB}$ の面積は上の鋭角三角形の場合と同様に求められるので，

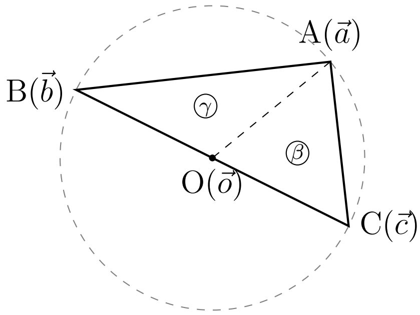
$$\alpha:\beta:\gamma=-\frac{R^2\sin 2\mathrm{A}}{2}:\frac{R^2\sin 2\mathrm{B}}{2}:\frac{R^2\sin 2\mathrm{C}}{2}=-\sin 2\mathrm{A}:\sin 2\mathrm{B}:\sin 2\mathrm{C} \tag{3}$$

[1]三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点を外心という．外心は，各頂点から等距離にあることが知られている．この性質から，外心を中心として，3 頂点を通る円が描けることが従う．この円を外接円という．

[2]加重重心の拡張 https://gleamath.com/weighted-center02/

が成り立つ．

最後に $\triangle$ABC が直角三角形である場合を考える．$\angle$A が直角であるとする．このとき，外心 O は辺 BC 上に位置している．さらに，線分 BC は外接円の直径なので，その中心である外心は，線分 BC の中点である．よって，外心 O の位置ベクトルは，



$$\vec{o} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

と表せる．

一方，今，$\sin 2\mathrm{A} = \sin 180^\circ = 0$ であり，$2\mathrm{B} = \angle\mathrm{COA} = 180^\circ - \angle\mathrm{BOA} = 180^\circ - 2\mathrm{C}$ なので，$\sin 2\mathrm{B} = \sin(180^\circ - 2\mathrm{C}) = \sin 2\mathrm{C}$ が成り立つ．以上から，(??) 式の正当性は，次のように確認できる：

$$\vec{o} = \frac{(\sin 2\mathrm{A})\vec{a} + (\sin 2\mathrm{B})\vec{b} + (\sin 2\mathrm{C})\vec{c}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} = \frac{(\sin 2\mathrm{B})\vec{b} + (\sin 2\mathrm{B})\vec{c}}{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{B}} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}.$$

以上から，どの場合においても命題の主張が成り立つ． $\square$

………………………………………………………………………………………

補足． $\triangle$ABC の 3 頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ，a, b, c とし，外接円の半径を R とすると，正弦定理から，$\sin \mathrm{A} = \dfrac{a}{2R}$ が成り立つので，二倍角の公式を用いて，$\sin 2\mathrm{A}$ は，

$$\sin 2\mathrm{A} = 2\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A} = \frac{a\cos\mathrm{A}}{R}$$

と表せる．この表示を用いて，外心の位置ベクトル $\vec{o}$ は，次のように表すこともできる：

$$\vec{o} = \frac{(\sin 2\mathrm{A})\vec{a} + (\sin 2\mathrm{B})\vec{b} + (\sin 2\mathrm{C})\vec{c}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} = \frac{a(\cos\mathrm{A})\vec{a} + b(\cos\mathrm{B})\vec{b} + c(\cos\mathrm{C})\vec{c}}{a\cos\mathrm{A} + b\cos\mathrm{B} + c\cos\mathrm{C}}.$$

さらに，余弦定理から，$\cos\mathrm{A} = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{bc}$ が成り立つので，$\vec{o}$ の分母は，

$$\begin{aligned} a\cos\mathrm{A} + b\cos\mathrm{B} + c\cos\mathrm{C} &= \frac{a(-a^2+b^2+c^2)}{bc} + \frac{b(a^2-b^2+c^2)}{ca} + \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}{abc} \end{aligned}$$

と計算できるので，外心の位置ベクトル $\vec{o}$ は，

$$\vec{o} = \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)\vec{a} + b^2(a^2-b^2+c^2)\vec{b} + c^2(a^2+b^2-c^2)\vec{c}}{a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

とも表せる．