三角形の内心の位置ベクトル

三角形があれば，その内心[1]が存在する．よって，三角形の 3 頂点の位置ベクトルを用いて，外心の位置ベクトルを表すことができる．本稿では，加重重心の結果[2]を用いて，内心の位置ベクトルの美しい表示を与える．以下では，以下では，$\sin\angle\mathrm{A}$ のことを $\sin\mathrm{A}$ と表し，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積もまた，$\triangle\mathrm{ABC}$ で表す．

命題. 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を $\mathrm{I}(\vec{i})$ とする．このとき，

$$\vec{i} = \frac{(\sin\mathrm{A})\vec{a} + (\sin\mathrm{B})\vec{b} + (\sin\mathrm{C})\vec{c}}{\sin\mathrm{A} + \sin\mathrm{B} + \sin\mathrm{C}} \tag{1}$$

が成り立つ．また，辺 $\mathrm{BC}, \mathrm{CA}, \mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ，a, b, c とすると，これは，

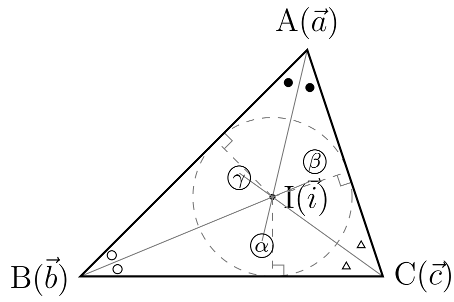
$$\vec{i} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a + b + c} \tag{2}$$

と表すこともできる．

証明. 内心 I は，必ず $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に存在するので，$\triangle\mathrm{BIC}, \triangle\mathrm{CIA}, \triangle\mathrm{AIB}$ の面積比を $\alpha : \beta : \gamma$ とすると，加重重心の結果から，内心 I の位置ベクトルは，

$$\vec{i} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

と表せる．



まずは，$\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$ であることを示す．辺 $\mathrm{BC}, \mathrm{CA}, \mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ，a, b, c とし，内接円の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{BIC} = \dfrac{r^2 a}{2}$ が成り立つ．他の小三角形に関しても同様に考えることで，

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{r^2 a}{2} : \frac{r^2 b}{2} : \frac{r^2 c}{2} = a : b : c$$

が成り立つ．よって，後半の主張 (2) が従う．

　前半の主張 (1) を示すには，$a : b : c = \sin\mathrm{A} : \sin\mathrm{B} : \sin\mathrm{C}$ であることを示せば良い．外接円の半径を R とすると，正弦定理[3]から

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}} = \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}} = 2R$$

が成り立つので，

$$a : b : c = 2R\sin\mathrm{A} : 2R\sin\mathrm{B} : 2R\sin\mathrm{C} = \sin\mathrm{A} : \sin\mathrm{B} : \sin\mathrm{C}$$

が従う． □

[1]三角形の 3 つの内角の二等分線の交点を内心という．内心は，3 辺から等距離にあることが知られている．この性質から，内心を中心として，3 辺に接する円が描ける．この円を内接円という．

[2]加重重心の拡張 https://gleamath.com/weighted-center02/

[3]正弦定理 https://gleamath.com/low-of-sines/