三角形の傍心の位置ベクトル

三角形あれば，その各頂点に対して，傍心[1]が定まる．よって，三角形の 3 頂点の位置ベクトルを用いて，傍心の位置ベクトルを表すことができる．本稿では，加重重心の結果[2]を用いて，傍心の位置ベクトルの美しい表示を与える．以下では，$\sin\angle\mathrm{A}$ のことを $\sin\mathrm{A}$ と表し，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積もまた，$\triangle\mathrm{ABC}$ で表す．

命題． 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\mathrm{B}(\vec{b}),\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂角 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ 内の傍心をそれぞれ，$\mathrm{I_A}(\vec{i_\mathrm{A}}),\mathrm{I_B}(\vec{i_\mathrm{B}}),\mathrm{I_C}(\vec{i_\mathrm{C}})$ とする．また，辺 $\mathrm{BC},\mathrm{CA},\mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ，a,b,c とする．このとき，

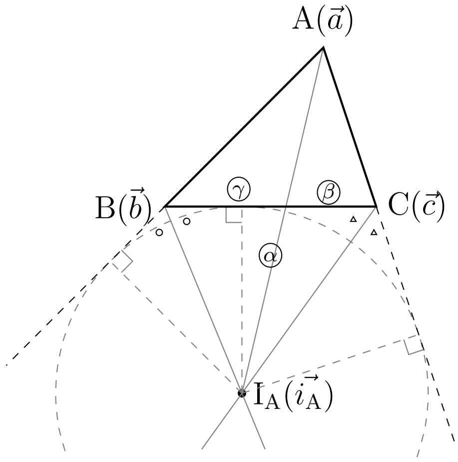
$$\vec{i_\mathrm{A}}=\frac{-(\sin\mathrm{A})\vec{a}+(\sin\mathrm{B})\vec{b}+(\sin\mathrm{C})\vec{c}}{-\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}}=\frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c} \tag{1}$$

$$\vec{i_\mathrm{B}}=\frac{(\sin\mathrm{A})\vec{a}-(\sin\mathrm{B})\vec{b}+(\sin\mathrm{C})\vec{c}}{\sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}}=\frac{a\vec{a}-b\vec{b}+c\vec{c}}{a-b+c} \tag{2}$$

$$\vec{i_\mathrm{C}}=\frac{(\sin\mathrm{A})\vec{a}+(\sin\mathrm{B})\vec{b}-(\sin\mathrm{C})\vec{c}}{\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}-\sin\mathrm{C}}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}-c\vec{c}}{a+b-c} \tag{3}$$

が成り立つ．

証明．どれも同じなので，頂角 A 内の傍心 $\mathrm{I_A}$ に対する主張 (1) だけ示す．
傍心 $\mathrm{I_A}$ は，三角形の外部の右図のような位置に存在する．$\triangle\mathrm{BI_AC},\triangle\mathrm{CI_AA},\triangle\mathrm{AI_AB}$ の面積比を $\alpha:\beta:\gamma$ とすると，加重重心の結果から，傍心 $\mathrm{I_A}$ の位置ベクトルは，



$$\vec{i_\mathrm{A}}=\frac{-\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{-\alpha+\beta+\gamma}$$

と表せる．辺 $\mathrm{BC},\mathrm{CA},\mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ，a,b,c とし，傍接円，外接円の半径をそれぞれ，r_A,R とすると，

$$\triangle\mathrm{BI_AC}=\frac{r_\mathrm{A}^2a}{2}=r_\mathrm{A}^2R\sin\mathrm{A}$$

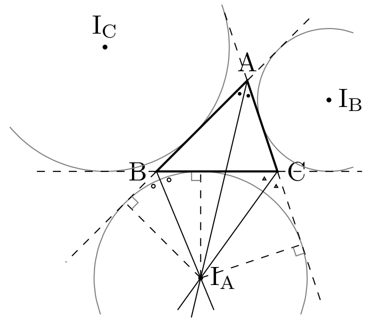
が成り立つ．（2 つ目の等号は正弦定理を用いた．）
他の小三角形に関しても同様に考えることで，

$$\alpha:\beta:\gamma=\frac{r_\mathrm{A}^2a}{2}:\frac{r_\mathrm{A}^2b}{2}:\frac{r_\mathrm{A}^2c}{2}=a:b:c=\sin\mathrm{A}:\sin\mathrm{B}:\sin\mathrm{C}$$

が従う． □

[1]傍心 $\mathrm{I_A},\mathrm{I_B},\mathrm{I_C}$ と傍接円：

$\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，$\angle\mathrm{A}$ の内角の二等分線と，$\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{C}$ の外角の二等分線の交点を頂角 A 内の傍心という．頂角 A 内の傍心は，辺 BC と，辺 CA,AB の延長線から等距離にある ことが知られている．この性質から，頂角 A 内の傍心を中心として，辺 BC と，辺 CA,AB の延長線に接する円が描ける．この円を（頂角 A 内の傍心を中心とする）傍接円という．同様にして，頂角 B,C 内の傍心が定まり，それらを中心とする傍接円が定まる．このようにして，1 つの三角形に対して，3 つの傍心と，3 つの傍接円が定まる．



[2]加重重心の拡張 https://gleamath.com/weighted-center02/