三角方程式

定義.
- 三角関数を含む方程式のことを**三角方程式**といい，
- 一般角で表された三角方程式の解を**一般解**という．

三角関数の復習

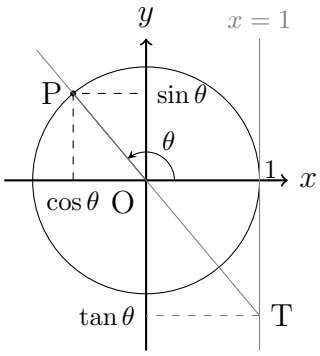
一般角 θ を表す動径と，中心が原点 O である単位円との交点を P とすると，三角関数の定義から，点 P の座標は，

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$$

と書ける．また，このとき，$\tan\theta$ は，直線 OP の傾きなので，直線 OP と，直線 $x=1$ の交点を T とすると，点 T の座標は，

$$\mathrm{T}(0, \tan\theta)$$

と書けるのであった．



正確な表現ではないが，以下では動径 OP の表す一般角のことを「点 P の一般角」などと表現する．

例えば，定数 a $(-1 \leq a \leq 1)$ に対して，三角方程式

$$\sin\theta = a \qquad (1)$$

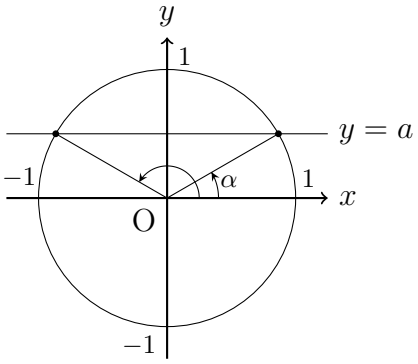
の一般解は，上の記号をそのまま用いると，

点 P の y 座標が a となる θ

と考えることができる．これは，右図のように，

単位円と直線 $y=a$ との交点の一般角

と考えても同じことである．



このような一般角（すなわち方程式の解）は，無数に存在するが，そのうちの 1 つを α とすることで，全てを統一して，次のように書ける．

$$\alpha + 2n\pi, \quad (\pi - \alpha) + 2n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$

よって，これらが，三角方程式 (1) の一般解である．

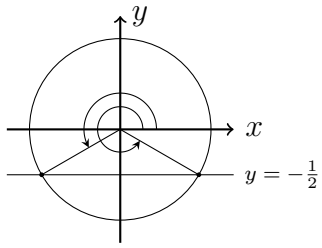
注意. 上の三角方程式 (1) において，定数 a が，$a < -1$ や $a < 1$ であるとき，この方程式の解は存在しない．これは，直線 $y=a$ と単位円の交点が存在しない，言い換えると，y 座標が a となる単位円上の点が存在しないからである．

例. $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ の解を求めよ．ただし，$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．

原点を中心とする単位円と，直線 $y = -\frac{1}{2}$ の交点を考えれば良い．右図のように，$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では，その交点は 2 つあり，それぞれの点に対応する一般角は，

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

である．よってこれらが求める三角方程式の解である．



注意. 一般に三角方程式の一般解は無数に存在することを見たが，上の例のように，解の範囲が指定されている場合，その範囲内で存在する全ての解を答えることに注意する．

$\cos\theta$ が単位円上の点の x 座標に対応することから，上と同様にして，$\cos\theta$ を含む三角方程式に関しても，その一般解を求めることができる．

定数 a $(-1 \leq a \leq 1)$ に対して，三角方程式

$$\cos\theta = a \tag{2}$$

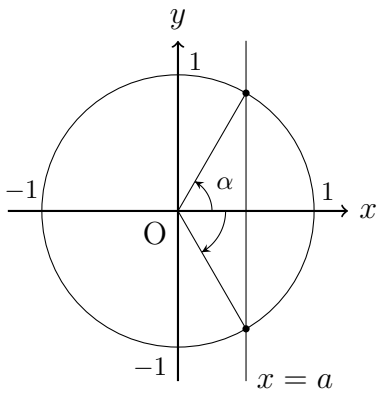
の一般解は，右図のように，

単位円と直線 $x = a$ との交点の一般角

と考えることができる．よって，1 つの解を α とすると，三角方程式 (2) の一般解は，

$$\pm\alpha + 2n\pi$$

と書ける．ただし，n は整数である．



注意. 定数 a が，$a < -1$ や $a < 1$ であるとき，に三角方程式 (2) の解が存在しないことについては，$\sin\theta$ を含む三角方程式の注意と同様である．

最後に，$\tan\theta$ を含む三角方程式について考える．上の三角関数の復習で見たように，$\tan\theta$ が，直線 $x = 1$ と，直線 OP の交点 T の y 座標に対応する．またこれは直線 OP の傾きと考えることもできるのであった．このことを用いて，$\tan\theta$ を含む三角方程式についても，その一般解を求めることができる．

定数 a に対して，三角方程式

$$\tan\theta = a \tag{3}$$

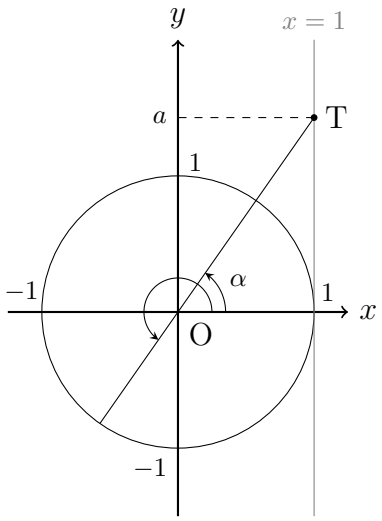
の一般解は，右図のように，

単位円と直線 $y = ax$ との交点の一般角

と考えることができる．よって，1 つの解を α とすると，三角方程式 (3) の一般解は，

$$\alpha + n\pi$$

と書ける．ただし，n は整数である．



注意. 三角方程式 (1), (2) とは違い，三角方程式 (3) は，任意の実数 a に対して解を持つ．これは，任意の実数 a に対して，直線 $y = ax$ と単位円が交点を持つからである．また，一般解の間隔についても，三角方程式 (1), (2) の一般解の間隔が $2n\pi$ であったのに対して，三角方程式 (3) の一般解の間隔は $n\pi$ である．これは，関数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ の周期が 2π であり，関数 $y = \tan x$ の周期が π であったことに対応している．

三角方程式の基本

- 三角方程式 $\sin\theta = a$ の解は，直線 $y = a$ と単位円の交点を考えれば良い．
- 三角方程式 $\cos\theta = a$ の解は，直線 $x = a$ と単位円の交点を考えれば良い．
- 三角方程式 $\tan\theta = a$ の解は，直線 $y = ax$ と単位円の交点を考えれば良い．