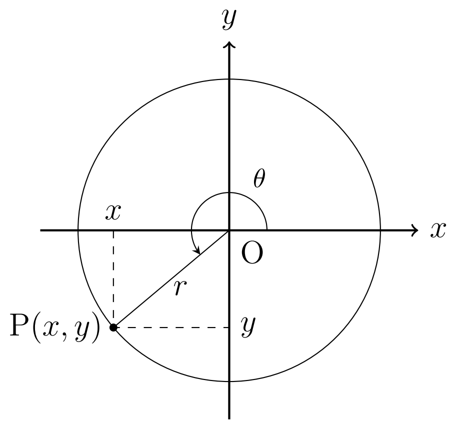
三角関数

座標平面上の原点 O を中心とする半径 r の円を考える．x 軸の正の部分を始線にとり，一般角 θ の動径と，この円との交点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする．



補題. $\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の各値は，r によらず，θ だけによって決まる．

証明．上と同様に，半径 r' の円を考え，θ の動径と，この円との交点を $\mathrm{P}'(x', y')$ とする．点 P，P$'$ から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ H，H$'$ とする．明らかに △OPH と △OP$'$H$'$ は相似である．よって，$\dfrac{y}{r} = \dfrac{y'}{r'}$ が成り立つ．他の 2 つも同様にである． □

上の補題から，3 つの値 $\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ は θ の関数である．よって，次の定義は正当である．

定義. 上の状況において，

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定義し，それぞれ一般角 θ の**正弦**（sine・サイン），**余弦**（cosine・コサイン），**正接**（tangent・タンジェント）といい，これらをまとめて**三角関数**という．ただし，任意の整数 n に対して，$\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ のとき，$\tan\theta$ は定義されない．

三角関数を半径 r の円を用いて定義したが，その値は r によらないことが，上の補題からわかっている．このため，今後は，次のように単位円（半径 $r = 1$ の円）を用いて考える方が，利点が多い．

単位円と三角関数

座標平面上の原点 O を中心とする単位円（$r = 1$）を考える．このとき，三角関数の定義から，

$$\sin\theta = y \quad , \qquad \cos\theta = x \quad , \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

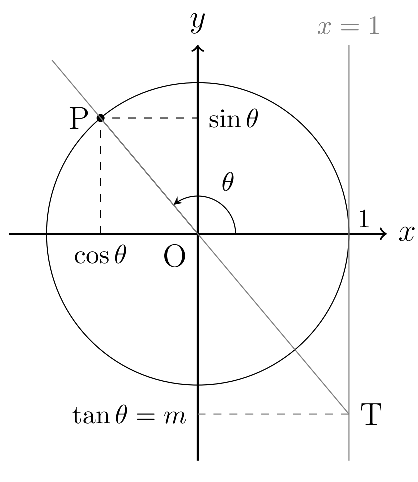
が成り立つ．すなわち，点 P の座標を

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$$

と記述できる．さらに直線 OP と，直線 $x = 1$ の交点を T とし，点 T の y 座標を m とすると，m は直線 OP の傾きを表している．すなわち，

$$\tan\theta = m = （\text{直線 OP の傾き}）$$

と考えられる．



単位円を考えることにより，次の結果も明らかである．

三角関数の定義域と値域

三角関数の定義域（θ）は実数全体である．値域についても，次が成り立つ．

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1 \quad , \quad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1 \quad , \quad \tan\theta : \text{実数全体}$$

三角比の相互関係は，次のように一般角の三角関数に拡張できる．

三角関数の相互関係

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　(ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　(iii) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

ただし，(i),(iii) については，任意の整数 n に対して，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ のときに限る．

証明．(i) 定義から，$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ が成り立つ．

(ii) 三平方の定理より，$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$ が成り立つ．これから結果を得る．

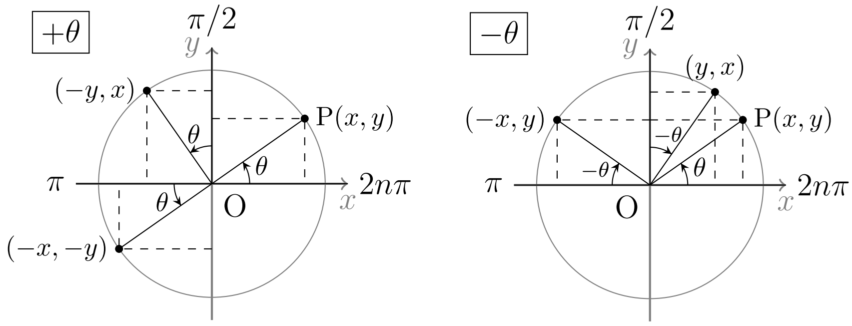
(iii) $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ のとき，$\cos\theta \neq 0$ である．(ii) の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることで，結果を得る． □

最後に，様々な角の三角関数の間の関係について紹介する．

- $2n\pi \pm \theta$　　$(n \in \mathbb{Z})$
  $\sin(2n\pi \pm \theta) = \pm\sin\theta$　　$\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos\theta$　　$\tan(2n\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta$
- $\pi \pm \theta$
  $\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta$　　$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta$　　$\tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta$
- $\dfrac{\pi}{2} \pm \theta$
  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta$　　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta$　　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\dfrac{1}{\tan\theta}$

注意．公式を覚えるのではなく，次に述べるイメージを持ち，公式を導き出すことが大切である：公式は全て，$m\pi \pm \theta$ $(m = 2n, 1, \frac{1}{2})$ の形をしているので，基本的には，始線を x 軸の正の部分にとった場合と，始線を $m\pi$ の部分[1]にとった場合を比較すれば良い．また $-\theta$ は θ に対して，動径が反対の向きに回転している様子をイメージすると良い．

厳密な証明は省略するが，θ の場合と比較した右図を参考にしていただきたい．原点 O を中心とする単位円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ をとると，直線 OP の傾きが $\tan\theta$ であったことにも注意しておく．



[1]始線を x 軸の正の部分にとった場合に，$m\pi$ の動径を改めて始線とするということ．