三角不等式（三角関数の不等式）

定義. 三角関数を含む不等式のことを**三角不等式**[1] という．

三角方程式の一般解は，原点を中心とする単位円と直線との交点を考えることで導くことができた．またその一般解は，1 つの解が存在すれば無数に存在するのであった．これは，三角関数は周期的であるという性質によるものである．

これから解説する三角不等式についても，同様のこと[2] が起きる．しかしここでは，簡単のために始めから解の範囲を指定して考えることにする．

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．θ の動径と単位円との交点の y 座標が，$\sin\theta$ であったことを思い出す．定数 a に対して，三角不等式

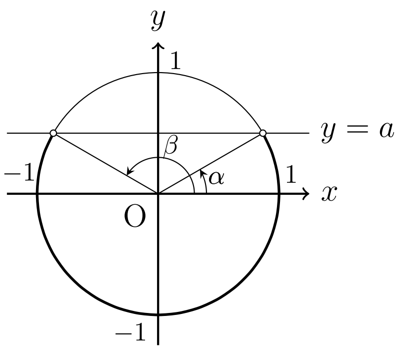
$$\sin\theta < a \tag{1}$$

の解は，y 座標が a より小さくなる単位円上の点を考えればよく，これは，

直線 $y = a$ より下にある単位円上の点

のことである．よって，

● $0 < a \leq 1$ のとき

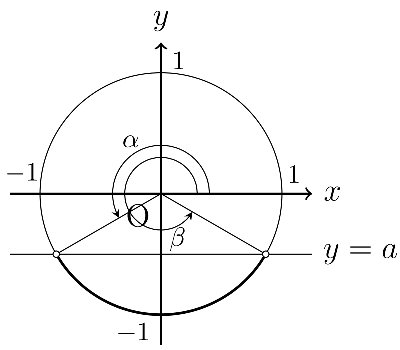


三角方程式 $\sin\theta = a$ の解を α, β（$\alpha \leq \beta$）とすると，三角不等式 (1) の解は，

$$0 \leq \theta < \alpha, \quad \beta < \theta < 2\pi$$

となる．（$\beta = \pi - \alpha$）

● $-1 < a \leq 0$ のとき



三角方程式 $\sin\theta = a$ の 2 つの解を α, β（$\alpha < \beta$）とすると，三角不等式 (1) の解は，

$$\alpha < \theta < \beta$$

となる．（$\beta = \pi - \alpha + 2\pi$）

● $1 < a$ のとき

単位円上の全ての点は，直線 $y = a$ より下にあるので，三角不等式 (1) の解は，

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

となる．

● $a \leq -1$ のとき

直線 $y = a$ より下にある単位円上の点は存在しないので，三角不等式 (1) は，

解なし

となる．

注意. 指定されている解の範囲には注意しなければならない．例えば $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ に対して，三角不等式 (1) の解は，その範囲が，$0 \leq \theta < 2\pi$ と指定されている場合には，上のように，$\dfrac{4}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi$ と答えれば良いが，$-\pi \leq \theta < \pi$ と指定されている場合には，$-\dfrac{2}{3}\pi < \theta < -\dfrac{\pi}{3}$ と答えなければならない．

[1] 不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|$ も三角不等式と呼ばれるため，この呼び方には注意が必要である．

[2] 一般に不等式の解は区間（の和集合）であるので，その区間が無数に存在するということ．

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．θ の動径と単位円との交点の x 座標が，$\sin\theta$ であった．定数 a に対して，三角不等式

$$\cos\theta \geq a \tag{2}$$

の解は，x 座標が a 以上となる単位円上の点を考えればよく，これは，

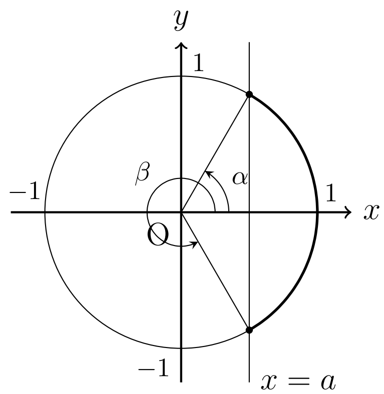
直線 $x = a$ とその右側にある単位円上の点

のことである．よって，

● $-1 \leq a < 1$ のとき，
三角方程式 $\cos\theta = a$ の解を α, β（$\alpha \leq \beta$）とすると，三角不等式 (2) の解は，

$$0 \leq \theta \leq \alpha, \quad \beta \leq \theta < 2\pi$$

となる．（$\beta = 2\pi - \alpha$）



● その他の場合も同様に考えれば良い．

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．θ の動径と直線 $x = 1$ との交点を T とすると，T の y 座標が $\tan\theta$ であった．また，このことから，$\tan\theta$ は，直線 OT の傾きと考えることもできるのであった．

定数 a に対して，三角不等式

$$\tan\theta \leq a \tag{3}$$

の解は，

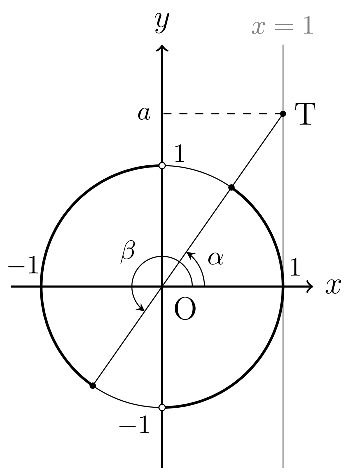
原点を通り傾きが a 以下である直線と単位円との交点

を考えれば良い．よって，

● $a \geq 0$ のとき，
三角方程式 $\tan\theta = a$ の解を α, β（$\alpha \leq \beta$）とすると，三角不等式 (3) の解は，

$$0 \leq \theta \leq \alpha, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \beta, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

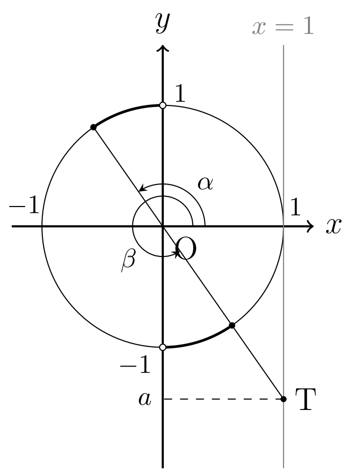
となる．（$\beta = \alpha + \pi$）



● $a < 0$ のとき，
三角方程式 $\tan\theta = a$ の解を α, β（$\alpha \leq \beta$）とすると，三角不等式 (3) の解は，

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \alpha, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta \leq \beta$$

となる．（$\beta = \alpha + \pi$）



注意． $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲において，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ で，$\tan\theta$ は定義されていないことに注意する．