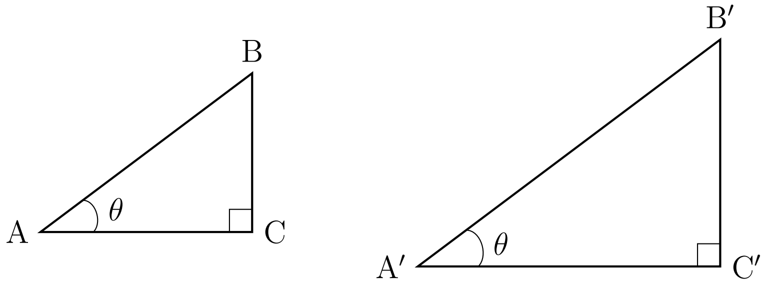
三角比

２つの直角三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を考える．　（$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C'} = 90^\circ$）
$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} = \theta$ とすると，２つの三角形は相似である．よって，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}}$$



が成り立つ．このことから，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ の値は，$\angle\mathrm{A} = \theta$ のみによって決まる事が分かる．同様に

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} \quad , \quad \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}}$$

も成り立つ事がわかり，これらも $\angle\mathrm{A} = \theta$ のみによって決まる量である．

三角比の定義（その１）

上の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，

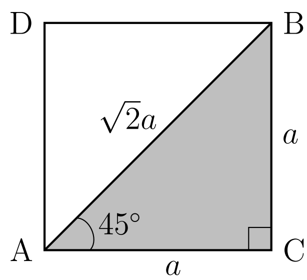
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

と定義し，それぞれ角 θ の**正弦**（sine・サイン），**余弦**（cosine・コサイン），**正接**（tangent・タンジェント）といい，これらをまとめて**三角比**という．

例． 特別な角度の三角比（その１）

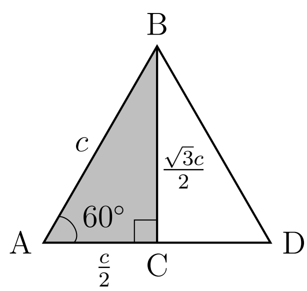
- $\theta = 45^\circ$
  右のように正方形 ACBD を半分に切った時に現れる $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える．$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ であり，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ である．
  $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} = \mathrm{a}$ とすると，三平方の定理から，$\mathrm{AB} = \sqrt{2}\mathrm{a}$ である．
  よって，次が成り立つ．

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tan 45^\circ = 1$$



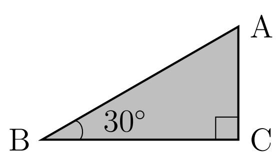
- $\theta = 60^\circ$
  右のように正三角形 ADB を半分に切った時に現れる $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える．ここで C は，辺 AD の中点である．$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ であり，$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ である．$\mathrm{AB} = \mathrm{c}$ とすると，$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{c}}{2}$，$\mathrm{BC} = \frac{\sqrt{3}\mathrm{c}}{2}$ である．
  よって，次が成り立つ．

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



- $\theta = 30^\circ$
  右のような $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える．これは上の（$\theta = 60^\circ$ の）$\triangle\mathrm{ABC}$ を置き換えたものである．$\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ なので，次が成り立つ．

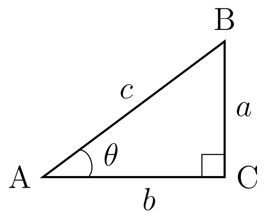
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



△ABC に対して，右のように，∠A, ∠B, ∠C の対辺の長さをそれぞれ， a, b, c とする．このとき，三角比の定義から，

$$a = c\sin\theta \quad , \quad b = c\cos\theta$$

が成り立つ．特に，$c = 1$ であれば，$a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$ である．



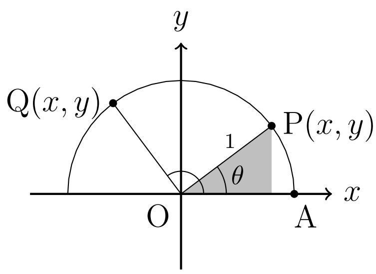
注意. 三角比の定義には，直角三角形が用いられているため，θ の範囲は，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ である．しかし，次のように三角比を**再定義**する事で，0° や 90° 以上の角度についての三角比も考える事ができる．

三角比の定義（その２）

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の半円において，点 A(1, 0) とする．$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に対して，半円上の点 P(x, y) を，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ となるような点とする．この時，角 θ の三角比を次のように定義する．

$$\sin\theta = y \quad , \quad \cos\theta = x \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

ただし，$\tan\theta$ に対しては，$\theta = 90^\circ$ を除く．

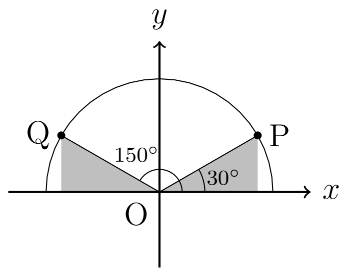


注意. 上の三角比の定義（その２）について，色付き部分の直角三角形を考えることによって，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の三角比に対しては，**三角比の定義（その１）に他ならない**事が分かる．さらにこの方法で，上の点 Q のように，90° 以上の三角比に対しても定義できた事が分かる．

上で θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ としていることについて，半円の代わりに円を考える事で，180° より大きい角の三角比についても定義できる事が分かるが，現行の数学 I 三角比では，180° までの三角比についてしか扱わないため，ここでも，θ の範囲を 180° までとした．

例. 特別な角度の三角比（その２）

特別な角度の三角比（その１）で $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の三角比について紹介した．$\theta = 30^\circ$, と，$\theta = 150^\circ$ の三角比を比較してみよう．これに対応する直角三角形は，右の図からも分かるように，**その向きが違うだけで同じもの**である事が分かる．点 P, Q の y 座標は同じなので，sin の値は同じであり，点 P, Q は y 軸に関して対称であることから，点 P, Q の x 座標は -1 倍違うので，cos の値は -1 倍違う．このような三角比の性質から，180° までの三角比のうち，特別なものの値について，下の表にまとめておく．



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	未定義	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0