自由加群の普遍性

A を（単位元を持つ）可換環とし，**A-Mod** を A 加群の圏[1]とする．A 加群 M, N に対して，M から N への A 線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ で表す．集合全体のなす圏を **Set** で表す．集合 X, Y に対して，X から Y への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表す．$U : \textbf{A-Mod} \to \textbf{Set}$ を忘却関手[2]とし，$h^X : \textbf{Set} \to \textbf{Set}$ を X が表現する関手とする．

まずは，標準基底を持つ自由加群を構成する．A を可換環とし，X を集合とする．写像 $s \in \mathrm{Map}(X, A)$ に対して，集合 $s^{-1}(0) \subset X$ の X に関する補集合を $V_s := X \setminus s^{-1}(0)$ で表す．$A^{(X)}$ を $\mathrm{Map}(X, A)$ の部分集合として，

$$A^{(X)} := \{s \in \mathrm{Map}(X, A) \mid \#(V_s) < \infty\}$$

で定める[3]．任意の $x \in X$ に対して，写像 $e_x : X \to A$ を

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & (y = x) \\ 0 & (y \neq x) \end{cases}$$

で定めると，$V_{e_x} = X \setminus e_x^{-1}(0) = \{x\}$ は有限集合なので，$e_x \in A^{(X)}$ である．（後の補題より，）$A^{(X)}$ は，$B := \{e_x \mid x \in X\}$ を基底に持つ自由 A 加群である．

写像 i_X を

$$i_X : X \to A^{(X)} \quad ; \quad x \mapsto e_x$$

で定め，これを**標準写像**と呼ぶ．i_X を普遍元として，自由 A 加群 $A^{(X)}$ は，合成関手 $h^X \circ U$ を表現する．

定理. $h^{A^{(X)}} : \textbf{A-Mod} \to \textbf{Set}$ を A 加群 $A^{(X)}$ が表現する関手とする．このとき，関手の同型

$$i_X^* : h^{A^{(X)}} \to h^X \circ U$$

が存在する．

定義. 定理の関手の同型 i_X^* が存在することを**自由加群の普遍性**という．

証明．$i_X \in \mathrm{Map}(X, A^{(X)}) = h^X \circ U(A^{(X)})$ なので，米田の補題から，関手の射 $i_X^* : h^{A^{(X)}} \to h^X \circ U$ が，任意の A 加群 M に対して

$$i_X^*(M) : \mathrm{Hom}_A(A^{(X)}, M) \to \mathrm{Map}(X, M) \quad ; \quad g \mapsto g \circ i_X$$

で定まる[4]．これが可逆であることを示せば良い．
$f \in \mathrm{Map}(X, M)$ に対して，写像 $g_f : A^{(X)} \to M$ を，$s \in A^{(X)}$ に対して，

$$g_f(s) = \sum_{x \in V_s} s(x) f(x)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & M \\ A^{(X)} \arrow[ur, dotted, "\exists! g_f"'] & \end{tikzcd}$$

で定める．右辺が M に属することは，M が A 加群であることから従う．
g_f が A 線形写像であることは，$s, t \in A^{(X)}$ に対して，$x \in (V_s \cup V_t) \setminus V_{s+t}$ なら，$s(x) + t(x) = 0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} g_f(s+t) &= \sum_{x \in V_{s+t}} (s(x) + t(x)) f(x) = \sum_{x \in V_s \cup V_t} (s(x) + t(x)) f(x) \\ &= \sum_{x \in V_s \cup V_t} s(x) f(x) + \sum_{x \in V_s \cup V_t} t(x) f(x) = \sum_{x \in V_s} s(x) f(x) + \sum_{x \in V_t} t(x) f(x) = g_f(s) + g_f(t) \end{aligned}$$

と計算できることから従う．

[1] A 加群を対象とし，A 線形写像を射とすることで定まる圏．
[2] A 加群 M を（A 加群の構造を忘れて単に）集合 M に写す関手．A 線形写像は，写像に写る．
[3] $\#(V_s) < \infty$ は，集合 V_s が有限集合であることを表す．
[4] https://gleamath.com/yonedas-lemma/ を参照．$h^X \circ U(g)(i_X) = g \circ i_X$ である．

$f \in \mathrm{Map}(X, M)$ に対して定まる $g_f \in \mathrm{Hom}_A(A^{(X)}, M)$ が，$i_X^*(g_f) = f$ を満たす唯一の A 線形写像であることを示す．まず，任意の $x \in X$ に対して，

$$i_X^*(g_f)(x) = g_f \circ i_X(x) = g_f(e_x) = \sum_{x \in V_{e_x}} e_x(x) f(x) = e_x(x) f(x) = f(x)$$

が成り立つ．次に，$g \in \mathrm{Hom}_A(A^{(X)}, M)$ が $i_X^*(g) = f$ を満たす A 線形写像であるとすると，任意の $x \in X$ に対して，

$$g(e_x) = g \circ i_X(x) = i_X^*(g)(x) = f(x) = i_X^*(g_f)(x) = g_f \circ i_X(x) = g_f(e_x)$$

が成り立つ．よって，任意の $s = a_1 e_{x_1} + \cdots + a_n e_{x_n} \in A^{(X)}$ に対して，

$$g(s) = a_1 g(e_{x_1}) + \cdots + a_n g(e_{x_n}) = a_1 g_f(e_{x_1}) + \cdots + a_n g_f(e_{x_n}) = g_f(s)$$

であり，$g = g_f$ が従う． □

. . . .

補題. $A^{(X)}$ は，自由 A 加群[5] である．

証明. まずは，$A^{(X)}$ が A 加群であることを示す．$s, t \in A^{(X)}$, $a \in A$, $x \in X$ に対して，加法とスカラー倍をそれぞれ，

- $(s+t)(x) := s(x) + t(x)$
- $(a \cdot s)(x) := a \cdot s(x)$

で定める．$a \cdot s$ を as と表す．これらが well-defined であることを示す．加法については，

$$(s+t)^{-1}(0) = \{x \in X \mid s(x) + t(x) = 0\} \supset s^{-1}(0) \cap t^{-1}(0)$$

なので，$V_{s+t} \subset V_s \cup V_t$ が成り立つ．V_s, V_t は有限集合なので，V_{s+t} も有限集合であり，$s + t \in A^{(X)}$ が従う．零元は零写像であり，結合法則，交換法則や，逆元の存在は明らかである．スカラー倍についても同様に，

$$(a \cdot s)^{-1}(0) = \{x \in X \mid a \cdot s(x) = 0\} \supset \{x \in X \mid s(x) = 0\}$$

なので，$V_{as} \subset V_s$ が成り立つ．V_s は有限集合なので，V_{as} も有限集合であり，$a \cdot s \in A^{(X)}$ が従う．スカラー倍の公理を満たすことも明らかである．よって，$A^{(X)}$ は上で定めた演算により，A 加群となる．

次に，$A^{(X)}$ が，

$$B := \{e_x \in A^{(X)} \mid x \in X\}$$

を基底にもつ自由加群であることを示す．$s \in A^{(X)}$ に対して，V_s は有限集合なので，$V_s = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $a_i = s(x_i) \in A$ と表すと，

$$s = a_1 e_{x_1} + \cdots + a_n e_{x_n}$$

と書けるので，$A^{(X)}$ は，B によって A 上生成される．$s = 0$ とすると，任意の $x \in X$ に対して，$s(x) = 0$ であるが，$s(x_i) = a_i e_{x_i}(x_i) = a_i$ から，$a_i = 0$ が従う．よって，B は A 上線形独立である．以上から，$A^{(X)}$ は自由加群である． □

---

[5] 自由加群の定義は以下の通り．A を可換環とし，M を A 加群とする．

定義. X を M の部分集合とする．

- M が，X によって（A 上）**生成される**とは，任意の $m \in M$ が，次の形で表せることである：

$$m = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad (a_i \in A,\ x_i \in X).$$

  この形を，$x_1, \cdots, x_n$ の A 上の**線形結合**という．

- X が（A 上）**線形独立である**とは，互いに異なる $x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して，次が成り立つことである：

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

定義.

- M が，線形独立な部分集合 B によって生成されるとき，B は M の**基底**であるという．
- M の基底が存在するとき，M を**自由 A 加群**という．