多項式環の普遍性

集合の圏を **Set** で表し，集合 X, Y に対して，X から Y への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表す．A を（単位元を持つ）可換環とする．A 加群の圏を A-**Mod** で表し，A 加群 M, N に対して，M から N への A 線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ で表す．A 上の環の圏[1]を $\mathbf{Ring}^A$ で表し，A 上の環 B, C に対して，B から C への A 上の環の射全体の集合を $\mathrm{Mor}_A(B, C)$ で表す．A-**Mod** または $\mathbf{Ring}^A$ から **Set** への忘却関手をどちらも U で表す．

A を可換環とし, $\mathbb{N}$ を非負整数全体のなす集合とする．写像 $s \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A)$ に対して, 集合 $s^{-1}(0) \subset \mathbb{N}$ の $\mathbb{N}$ に関する補集合を $V_s := \mathbb{N} \setminus s^{-1}(0)$ で表す．$A^{(\mathbb{N})}$ を $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, A)$ の部分集合として，

$$A^{(\mathbb{N})} := \{s \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A) \mid \#(V_s) < \infty\}$$

で定める[2]．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，写像 $e_n : \mathbb{N} \to A$ を

$$e_n(m) = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

で定めると，$A^{(\mathbb{N})}$ は，$\{e_n \in A^{(\mathbb{N})} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を標準基底に持つ自由 A 加群である[3]．標準写像 $i_{\mathbb{N}}$ を

$$i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A^{(\mathbb{N})} \quad ; \quad n \mapsto e_n$$

で定めると，$i_{\mathbb{N}}$ を普遍元として，$A^{(\mathbb{N})}$ は，合成関手 $h^X \circ U$ を表現する．すなわち，関手の同型

$$i_{\mathbb{N}}^* : h^{A^{(\mathbb{N})}} \to h^{\mathbb{N}} \circ U \tag{1}$$

が存在する [3]．ここで，$h^{A^{(\mathbb{N})}} : A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ は，自由 A 加群 $A^{(\mathbb{N})}$ が表現する関手である．

命題. $A^{(\mathbb{N})}$ は，A 上の環である．

証明. $\mathbb{N}$ では通常の加法を考える．まずは，乗法を定義する．任意の $m \geq 0$ に対して，写像 i_m を

$$i_m : \mathbb{N} \to A^{(\mathbb{N})} \quad ; \quad n \mapsto e_{n+m}$$

で定める[4]．自由加群の普遍性 (1) より，可逆写像

$$i_{\mathbb{N}}^*(A^{(\mathbb{N})}) : \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A^{(\mathbb{N})})$$

が存在するので，これにより，$i_m \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A^{(\mathbb{N})})$ に対応する $\mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})})$ の元を，g_{i_m} で表すと，

$$g_{i_m}(e_n) = \sum_{x \in V_{e_n}} e_n(x) i_m(x) = e_n(n) i_m(n) = e_{n+m}$$

である．さらに，写像 $j_{\mathbb{N}}$ を

$$j_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})}) \quad ; \quad m \mapsto g_{i_m}$$

で定める．再び，自由加群の普遍性 (1) から，可逆写像

$$i_{\mathbb{N}}^*(\mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})})) : \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})})) \to \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})}))$$

が存在するので, これにより, $j_{\mathbb{N}} \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})}))$ に対応する $\mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, \mathrm{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A^{(\mathbb{N})}))$ の元を f で表すと，標準基底 e_n, e_m に対して，

$$f(e_m)(e_n) = \left(\sum_{x \in V_{e_m}} e_m(x) j_{\mathbb{N}}(x) \right)(e_n) = \left(e_m(m) j_{\mathbb{N}}(m)\right)(e_n) = g_{i_m}(e_n) = e_{n+m} \tag{2}$$

である．$A^{(\mathbb{N})}$ の乗法 $\cdot$ を，$s, t \in A^{(\mathbb{N})}$ に対して，

$$s \cdot t := f(s)(t)$$

で定義する．(2) から，標準基底に対しては，$e_n \cdot e_m = e_{n+m}$ である．

---

[1]A 上の環 B とは，環準同型 $A \to B$ のことである．A 上の環 $\pi_B : A \to B$, $\pi_C : A \to C$ に対して，A 上の環の射 $h : B \to C$ とは，環準同型であって，$\pi_C = h \circ \pi_B$ を満たすものである．

[2]$\#(V_s) < \infty$ は，集合 V_s が有限集合であることを表す．

[3]自由加群の普遍性 https://gleamath.com/universality-of-free-module01/ を参照．

[4]i_0 は，上で定めた標準写像 $i_{\mathbb{N}}$ である．

上で定めた乗法が，結合則，交換則，分配則を満たすことを確認しなければならない．$A^{(\mathbb{N})}$ は自由加群であり，f と g_{i_m} は A 線形写像なので，基底に対して確認すれば十分である[5]．同様の理由により，分配法則が成り立つことが確認できる．また，結合則と交換則は，$\mathbb{N}$ の加法がこれらを満たすことから成り立つ．乗法単位元は e_0 である．f の構成から，標準基底 e_n, e_m に対して，(2) を満たすものは，唯一であることも従う．A からの環準同型は，

$$\pi : A \to A^{(\mathbb{N})} \quad ; \quad a \mapsto ae_0$$

で定まる． □

定義. $A^{(\mathbb{N})}$ を上で定めた乗法により，A 上の環と考えたものを $A[T]$ で表し，**A 上の 1 変数多項式環**よぶ．e_n は T^n で表す．乗法の定義から，$T^n \cdot T^m = T^{n+m}$ である．

$h^{A[T]} : \mathbf{Ring}^A \to \mathbf{Set}$ を A 上の 1 変数多項式環 $A[T]$ が表現する関手とする．$A[T]$ は普遍元を T として，忘却関手 $U : \mathbf{Ring}^A \to \mathbf{Set}$ を表現する．

定理. 関手の同型

$$h^{A[T]} \to U$$

が存在する．

証明. $\pi_B : A \to B$ を A 上の環とする．$a \in A$ に対して，$\pi_B(a)$ もまた a と表す．値写像 ev_T を

$$\mathrm{ev}_T : \mathrm{Mor}_A(A[T], B) \to B \quad ; \quad g \mapsto g(T)$$

で定め，これが可逆であることを示す．

$b \in B$ に対して，A 線形写像 f_b を

$$f_b : A[T] \to B \quad ; \quad T^n \mapsto b^n \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

で定める．乗法を保つ事は，

$$f_b(T^n \cdot T^m) = f_b(T^{n+m}) = b^{n+m} = b^n \cdot b^m = f_b(T^n) \cdot f_b(T^m)$$

により確認できる．任意の $a \in A$ に対して，

$$f_b \circ \pi(a) = f_b(ae_0) = af_b(e_0) = aT^0 = a = \pi_B(a)$$

が成り立つので，$f_b \circ \pi = \pi_B$ である．よって，$f_b \in \mathrm{Mor}_A(A[T], B)$ である．さらに，

$$\mathrm{ev}_T(f_b) = f_b(T) = b$$

が成り立つ．また，$f \in \mathrm{Mor}_A(A[T], B)$ を $f(T) = b$ を満たすものとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$f(T^n) = f(T)^n = b^n = f_b(T^n)$$

であるから，$f = f_b$ が従う．以上から，ev_T は可逆である． □

定義. 定理の関手の同型が存在することを**多項式環の普遍性**という．普遍元 T を**不定元**と呼ぶ．また，$P \in A[T]$ と $b \in B$ に対して，$f_b(P) \in B$ を多項式 P への b の**代入**と呼び，$P(b)$ で表す．

---

[5] 例えば，$s = a_0e_0 + a_1e_1,\ t = b_0e_0 + b_1e_1 \in A^{(\mathbb{N})}$ に対しては次が成り立つ．

$$\begin{aligned} s \cdot t &= f(s)(t) = f(a_0e_0 + a_1e_1)(t) = (a_0f(e_0) + a_1f(e_1))\,(t) = (a_0g_{i_0} + a_1g_{i_1})\,(t) = a_0g_{i_0}(t) + a_1g_{i_1}(t) \\ &= a_0g_{i_0}(b_0e_0 + b_1e_1) + a_1g_{i_1}(b_0e_0 + b_1e_1) = a_0b_0g_{i_0}(e_0) + a_0b_1g_{i_0}(e_1) + a_1b_0g_{i_1}(e_0) + a_1b_1g_{i_1}(e_1) \\ &= a_0b_0e_0 + a_0b_1e_1 + a_1b_0e_1 + a_1b_1e_2 (= a_0b_0e_0e_0 + a_0b_1e_0e_1 + a_1b_0e_1e_0 + a_1b_1e_1e_1) \end{aligned}$$