# 剰余加群の普遍性

$A$ を（単位元を持つ）可換環とし，**A-Mod** を $A$ 加群の圏[1]とする．**A-Mod** の対象 $M, N$ に対して，$M$ から $N$ への射 $M \to N$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ で表す．集合全体のなす圏を **Set** で表す．

$N$ を $A$ 加群，$M$ を $N$ の部分加群とし，$i : M \to N$ を包含写像とする．$M$ による $N$ の剰余加群を $N/M$ で表し，$p : N \to N/M$ を標準全射とする．$N$ が表現する関手 $h^N : \mathbf{A\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ の部分関手 $\mathrm{Ker}\ i^*$ を $A$ 加群 $W$ に対して，

$$\mathrm{Ker}\ i^*(W) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(N, W) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_A(M, W))$$

で定める．ここで，$f \in \mathrm{Hom}_A(N, W)$ に対して，$i^*(f) = f \circ i \in \mathrm{Hom}_A(M, W)$ である．

**命題.** 関手 $\mathrm{Ker}\ i^*$ は，関手 $h^N$ の部分関手である．

証明. 任意の $A$ 加群 $W$ に対して，次が成り立つことを示せば良い：

- $\mathrm{Ker}\ i^*(W)$ が，$h^N(W)$ の部分集合であり，
- 関手の射[2] $\varphi : \mathrm{Ker}\ i^* \to h^N$ が存在して，$\varphi(W) : \mathrm{Ker}\ i^*(W) \to h^N(W)$ が包含写像である．

まず，任意の $A$ 加群 $W$ に対して，

$$\mathrm{Ker}\ i^*(W) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(N, W) \mid f \circ i = 0\}$$

は，$h^N(W) = \mathrm{Hom}_A(N, W)$ の部分集合である．

次に，$\varphi(W) : \mathrm{Ker}\ i^*(W) \to h^N(W)$ が包含写像となるように，関手の射 $\varphi$ が，定義できることを示す．$V$ を $A$ 加群をする．$A$ 加群の射 $k : V \to W$ に対して，
写像

$$k_* : h^N(V) \to h^N(W)\ ;\ g \mapsto k \circ g$$

が定まり，これに対して写像

$$\varphi(k_*) : \mathrm{Ker}\ i^*(V) \to \mathrm{Ker}\ i^*(W)\ ;\ g \mapsto k \circ g$$

$$\begin{tikzcd}
h^N(V) \arrow[r, "k_*"] & h^N(W) \\
\mathrm{Ker}\ i^*(V) \arrow[u, "\varphi(V)"'] \arrow[r, "\varphi(k_*)"] & \mathrm{Ker}\ i^*(W) \arrow[u, "\varphi(W)"']
\end{tikzcd}$$

は，$g \in \mathrm{Ker}\ i^*(V)$ なら，$g \circ i = 0$ であり，これから，
$k \circ g \circ i = 0$ なので，$k \circ g \in \mathrm{Ker}\ i^*(W)$ となり，well-defined [3] である．上の図式は，明らかに可換であるので，$\varphi$ は，示すべき関手の射である． □

**定理.** 上の記号をそのまま用いる．関手の同型

$$p^* : h^{N/M} \to \mathrm{Ker}\ i^*$$

が存在する．

**定義.** 定理の関手の同型 $p^*$ が存在することを**剰余加群の普遍性**という．

**定義.** $C$ を圏とし，$F : C \to \mathbf{Set}$ を関手とする．$C$ の対象 $X$ と関手の同型 $h^X \to F$ が存在するとき，$F$ は $X$ で**表現される（表現可能である）**という．また，この同型により，$1_X \in h^X(X)$ に対応する $F(X)$ の元を，$F$ の**普遍元**という．

**注意.** 剰余加群の普遍性とは，**剰余加群 $N/M$ が関手 $\mathrm{Ker}\ i^*$ を表現する**ことと言っても同じことである．普遍元は，標準全射 $p \in \mathrm{Hom}_A(N, N/M)$ である．

---

[1] $A$ 加群を対象とし，$A$ 線形写像を射とすることで定まる圏．
[2] 自然変換ともいう
[3] 矛盾なく定義される．

定理の証明．$p : N \to N/M$ を標準全射とする．$p \circ i = 0$ なので[4]，$p \in \mathrm{Ker}\ i^*(N/M)$ である．米田の補題[5]から，関手（$\mathbf{A\text{-}Mod}^{\mathrm{op}}$ 上の前層）の射 $\psi^p : h^{N/M} \to \mathrm{Ker}\ i^*$ が，任意の $A$ 加群 $W$ に対して，

$$\psi^p(W) : h^{N/M}(W) \to \mathrm{Ker}\ i^*(W)\ ;\ f \mapsto \mathrm{Ker}\ i^*(f)(p)$$

で定まる．$\mathrm{Ker}\ i^*$ は，$h^N$ の部分関手であったので，$f$ の $\psi^p(W)$ による像は，

$$\mathrm{Ker}\ i^*(f)(p) = h^N(f)(p) = f_*p = f \circ p$$

と計算できる．さらに，$p^*f = f \circ p$ とおくことで，$\psi^p = p^*$ と書ける．

$$p^*(W) : h^{N/M}(W) \to \mathrm{Ker}\ i^*(W)\ ;\ f \mapsto f \circ p$$

が可逆であることを示す．$A$ 線形写像 $g \in \mathrm{Ker}\ i^*(W) \subset \mathrm{Hom}_A(N, W)$ に対して，$f \circ p = g$ を満たす $A$ 線形写像 $f \in h^{N/M}(W)$ が一意的に存在することを示せは良い．

積 $N/M \times W$ の部分加群 $\Gamma$ を

$$\Gamma := \{(p(x), g(x)) \in N/M \times W \mid x \in N\}$$

で定める．$\Gamma$ が，写像 $N/M \to W$ のグラフ[6] であることを示す．そのためには，積 $N/M \times W$ の第 1 射影 $\mathrm{pr}_1 : N/M \times W \to N/M$ の $\Gamma$ への制限

$$\mathrm{pr}_1|_\Gamma : \Gamma \to N/M$$

が可逆であることを示せば良い．$\mathrm{pr}_1|_\Gamma$ は $A$ 線形写像である．

全射性を示す．写像

$$(p, g) : N \to N/M \times W\ ;\ x \to (p(x), g(x))$$

と $\mathrm{pr}_1|_\Gamma$ 合成写像との $\mathrm{pr}_1|_\Gamma \circ (p, g)$ は，標準全射 $p : N \to N/M$ であることから，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma$ は全射である．

単射性を示す．$\gamma := (p(x), g(x)) \in \Gamma$ とし，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma(\gamma) = 0$ であるとする．$N/M$ において，

$$\mathrm{pr}_1|_\Gamma(\gamma) = p(x) = 0$$

なので，$x \in M$ である．よって，$N$ において，$x = i(x)$ なので，

$$\gamma = (p \circ i(x), g \circ i(x)) = (0, 0) = 0$$

となり，単射性が従う．最後に，$p, g$ は $A$ 線形写像なので，$f \circ p = g$ を満たす写像 $f : N/M \to W$ は $A$ 線形写像である．　□

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & W \\ & N/M \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

---

[4] $M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} N/M$ より，$p \circ i(M) = 0$ である．

[5] https://gleamath.com/yonedas-lemma/

[6] 部分集合 $\Gamma \subset X \times Y$ が，写像 $X \to Y$ のグラフであるとは，任意の $x \in X$ に対して，$(x, y) \in \Gamma$ を満たす $y \in Y$ がただ 1 つ存在することをいう．