剰余環の普遍性

Ring を環の圏[1]とする．**Ring** の対象 A, B に対して，A から B への射 $A \to B$ 全体の集合を $\mathrm{Mor}(A, B)$ で表す．集合全体のなす圏を **Set** で表す．

A を環，I を A のイデアルとする．A が表現する関手 $h^A : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ の部分関手 F を，環 B に対して，

$$F(B) = \{f \in \mathrm{Mor}(A, B) \mid I \subset \mathrm{Ker} f\}$$

で定める．

注意. $i : I \to A$ を包含写像とし，環 B に対して，

$$\mathrm{Ker}\ i^*(B) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Mor}(A, B) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Mor}(I, B))$$

と定める．ここで，$f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ に対して，$i^*(f) = f \circ i \in \mathrm{Mor}(I, B)$ である．$I \subset \mathrm{Ker} f$ は，$f \circ i = 0$ と同じなので，関手として，$F = \mathrm{Ker}\ i^*$ である．よって，F は関手 h^A の部分関手である[2]．

I による A の剰余環を A/I で表し，$p : A \to A/I$ を標準全射とする．p の引き戻しは，関手の同型を誘導する．

定理. 上の記号をそのまま用いる．関手の同型

$$p^* : h^{A/I} \to F$$

が存在する．

定義. 定理の関手の同型 p^* が存在することを**剰余環の普遍性**という．

注意. 剰余環の普遍性とは，**剰余環 A/I が関手 F を表現する**ことと言っても同じことである．普遍元は，標準全射 $p \in \mathrm{Mor}(A, A/I)$ である．

定理の証明. 米田の補題[3]から，関手の射 $p^* : h^{A/I} \to F$ が，任意の環 B に対して，

$$p^*(B) : h^{A/I}(B) = \mathrm{Mor}(A/I, B) \to F(B)\ ;\ f \mapsto f \circ p$$

で定まる．これが可逆であることを示す．

剰余加群の普遍性から，$g \in F(B)$ に対して，$f \circ p = g$ を満たす A 線形写像 $f : A/I \to B$ が一意的に存在する．あとは，f が環準同型であることを示せば良い．

$p : A \to A/I$ は全射なので，$\overline{x}, \overline{y} \in A/I$ に対して，$p(x) = \overline{x}, p(y) = \overline{y}$ を満たす $x, y \in A$ が存在する．p, g は，環準同型なので，

$$f(\overline{x} \cdot \overline{y}) = f(p(x)p(y)) = f(p(xy)) = g(xy) = g(x)g(y) = f(p(x))f(p(y)) = f(\overline{x})f(\overline{y})$$

となり，f も環準同型である． □

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & B \\
& A/I \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

---

[1]（単位元を持つ可換）環を対象とし，環準同型写像を射とすることで定まる圏．

[2]剰余加群の普遍性 https://gleamath.com/universality-of-quotient-mod01/ の最初の命題を参照．

[3]https://gleamath.com/yonedas-lemma/