円のベクトル方程式

平面上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対して，円のベクトル方程式は，次のようになる．

命題． 中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は，

$$|\,\vec{p}-\vec{c}\,|=r \tag{1}$$

である．

証明．点 P が求める円上にあることと，中心 C からの距離が r であることは同じである．さらにこれは，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r \iff |\,\vec{p}-\vec{c}\,|=r$$

が成り立つことと同じである． □

注意． ベクトル方程式 (1) で表される円とは，$\mathrm{C}(\vec{c})$ と半径 r に対して定まる集合

$$\{\mathrm{P}(\vec{p})\ ;\ |\,\vec{p}-\vec{c}\,|=r\}$$

のことである．

円周角の定理[1]を用いると，次のような円のベクトル方程式を得ることができる．

命題． 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円のベクトル方程式は，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \tag{2}$$

である．

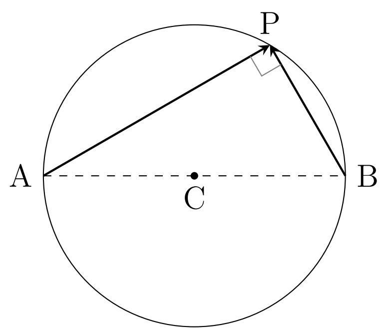
証明．円周角の定理から，点 P が求める円上にあることと，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ であることは同じである．さらにこれは，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0 \iff (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

が成り立つことと同じである． □

補足． 円のベクトル方程式 (2) は，次のように変形することもできる：

$$\begin{aligned}
(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})&=0\\
|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}&=0\\
|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4}&=\frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4}-\vec{a}\cdot\vec{b}\\
\left|\,\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\,\right|^2&=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}\\
\left|\,\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\,\right|&=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}
\end{aligned}$$



1 つ目の命題から，これは中心が AB の中点であり，半径が $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{2}$ の円であることがわかる．

[1] 1 つの弧に対する円周角は一定であり，その弧に対する中心角の半分である．特に，半円（直径）に対する円周角は直角である．