直線のベクトル方程式

座標平面上の直線（の方程式）$y = ax + b$ とは，正確には，等式 $y = ax + b$ を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の集まりのこと，すなわち，集合

$$\{\mathrm{P}(x, y) \mid y = ax + b\}$$

のことであった．このように，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の存在は，明記されないことが多いが，意識しておく必要がある．ここでは，点 P の位置を表すために，直交座標[1] $\mathrm{P}(x, y)$ を用いた．

同様に，点 P の位置を，位置ベクトル[2] を用いて表し，直線をベクトルの等式を用いて定めることができる．すなわち，平面上の直線を，集合

$$\{\mathrm{P}(\vec{p}) \mid \text{ベクトル } \vec{p} \text{ に関する等式}\} \tag{1}$$

として定めることができる．ここに現れた，「ベクトル $\vec{p}$ に関する等式」を **直線のベクトル方程式**[3]という．

それでは，実際に，直線のベクトル方程式を求めよう．ベクトルは，向きと大きさが備わった量であったから，直線の傾きは，あるベクトルの向きによって，定めることができる．

定義. 直線の向きを定めるベクトルを，その直線の**方向ベクトル**という．

このことから，直線の決定条件

「通る 1 点の座標と傾きが定まれば，直線は 1 つに決まる」

は，ベクトルの言葉で，

「通る 1 点の位置ベクトルと，方向ベクトルが定まれば，直線は 1 つに決まる」

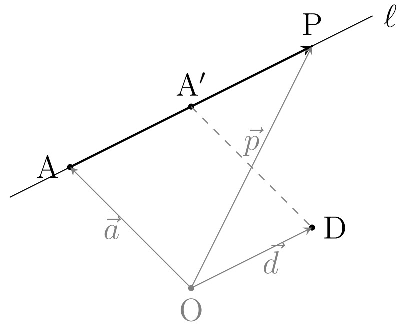
と言い換えることができる．直線の方向ベクトルが $\vec{d}$ であることと，直線が $\vec{d}$ と平行であることは同じである．

命題. 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d} \neq \vec{0}$ に平行な直線のベクトル方程式は，

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

である．ここで，t は実変数である．

証明．求める直線を ℓ とし，$\mathrm{D}(\vec{d})$ とする．位置ベクトルが $\vec{a} + \vec{d}$ である点を A' とすると，点 A' は，直線 ℓ 上の点である．点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ を $\mathrm{A}(\vec{a})$ とは異なる点とすると，



$$\mathrm{P}(\vec{p}) \text{ が直線 } \ell \text{ 上の点} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{AA'}} \text{ は平行}$$

が成り立つ．よって，このとき，$t \neq 0$ を実数として，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{AA'}} \\ \vec{p} - \vec{a} &= t\vec{d} \\ \vec{p} &= \vec{a} + t\vec{d} \end{aligned}$$

が成り立つ．P が A と等しいときは，$t = 0$ と対応しているので，主張が従う． □

---

[1] 直交する x 軸，y 軸に対して，x 座標，y 座標の組

[2] 基準となる点 O を固定すると，平面上の点 P は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と，一対一に対応する．このとき $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおき，$\vec{p}$ を点 P の位置ベクトルと呼ぶ．$\vec{p}$ が点 P の位置ベクトルであることを $\mathrm{P}(\vec{p})$ と表す．https://gleamath.com/position-vector/

[3] 集合 (1) が，直線以外のある図形を表す場合でも，「ベクトル $\vec{p}$ に関する等式」を，**その図形のベクトル方程式**という．

注意. 上で述べたように，直線（のベクトル方程式）$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ とは，集合

$$\{\mathrm{P}(\vec{p}) \mid \vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}\,\}$$

のことである．これは，t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の全体は直線を描くということである．t を**媒介変数**という．

この結果を用いて，2 点を通る直線のベクトル方程式は，次のように求められる．

命題. 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は，

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \tag{2}$$

である．ここで，t は媒介変数である．

証明. 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線の方向ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので，上の命題から，t を媒介変数として，直線のベクトル方程式は，

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\\&=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる． □

補足. 媒介変数 t に対して，$s=1-t$ とおけば，ベクトル方程式 (2) は，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b} \quad (s+t=1)$$

と表すこともできる．

零ベクトルでない 2 つのベクトルが垂直であるという条件は，それらの内積が 0 であることと同じであった．この事実を用いて，直線と垂直なベクトルが与えられたとき，その直線のベクトル方程式は，次のように簡単に表すことができる．

定義. 直線に垂直なベクトルを，その直線の**法線ベクトル**という．

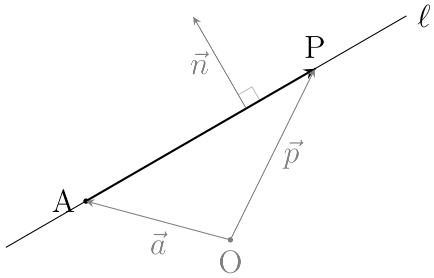
命題. 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}\neq\vec{0}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

である．

証明. 求める直線を ℓ とし，$\mathrm{P}(\vec{p})$ を $\mathrm{A}(\vec{a})$ とは異なる点とする．
このとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\vec{p})\text{が直線}\,\ell\,\text{上の点}\\&\Leftrightarrow \vec{n}\text{ と }\overrightarrow{\mathrm{AP}}\text{は垂直}\\&\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\\&\Leftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0\end{aligned}$$



が成り立つ．
P が A と等しいときも，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=\vec{n}\cdot\vec{0}=0$ が成り立つので，主張が従う． □