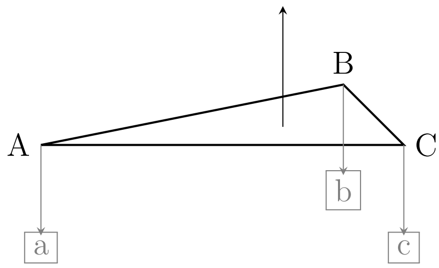
加重重心

三角形の重心を,(厳密ではないが)重さ的にバランスのとれる点として定義したとき,三角形の**加重重心**とは,各頂点におもりを置いたときの重心の位置ということができる.もちろん同じ三角形でも置くおもりの重さによって加重重心の位置は変わる.以下の仮定の点 P が加重重心である.

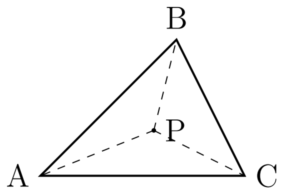


ベクトルを用いて加重重心を考察しよう.以下では,次の状況を仮定する.

仮定. $a, b, c > 0$ とする.$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部の点 P が

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$$

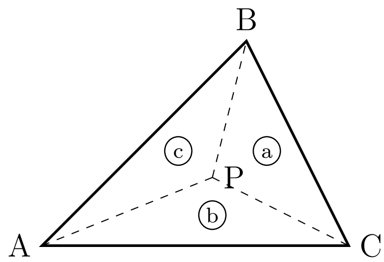
を満たしていると仮定する.



次の定理は,面積と重さを対応させることで,感覚的に加重重心を捉えやすい.

定理. 仮定の状況において,$\triangle\mathrm{PBC}, \triangle\mathrm{PCA}, \triangle\mathrm{PAB}$ の面積比は,$a : b : c$ である.

証明.$\overrightarrow{0} = a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を変形し,

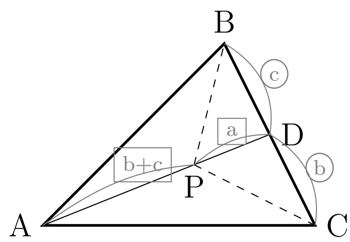


$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + c(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= (a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ (a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

を得る.$a+b+c \neq 0$ に注意すると,これから次が従う.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c} = \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}\right) \tag{1}$$

線分 BC を $c : b$ に内分する点を D とすると,$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$ が成り立つので,(1) 式と比較して,点 P は,線分 AD を $(b+c) : a$ に内分する点であることが分かる.以下では,$\triangle\mathrm{ABC}$ などの面積を S_{ABC} とかく.$S_{\mathrm{ABC}} = 1$ とすると,



$$S_{\mathrm{PAB}} = S_{\mathrm{ABC}} \cdot \frac{c}{b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{c}{a+b+c} \quad , \quad S_{\mathrm{PCA}} = S_{\mathrm{ABC}} \cdot \frac{b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b}{a+b+c}$$

が成り立つ.また同様にして,

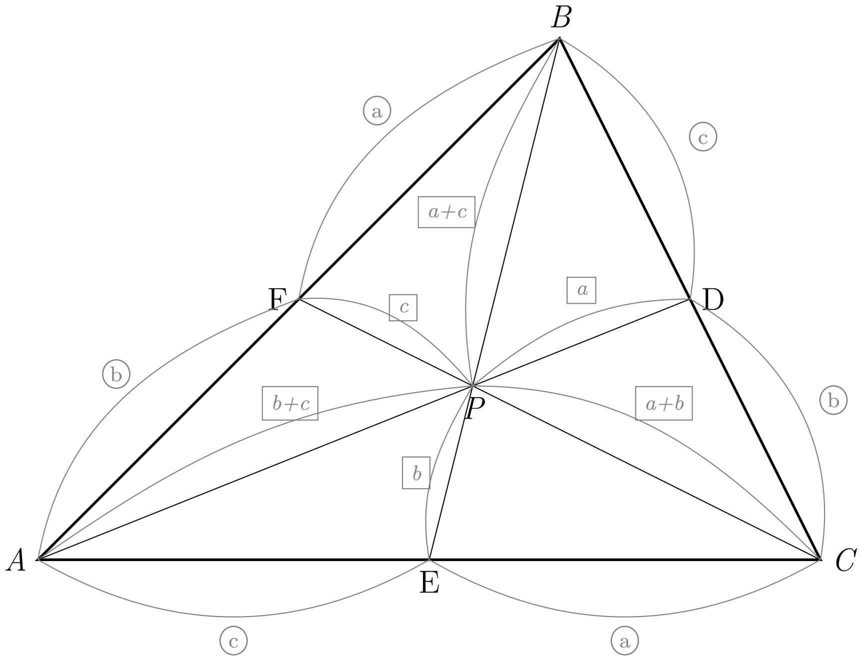
$$S_{\mathrm{PBC}} = S_{\mathrm{PBD}} + S_{\mathrm{PCD}} = \frac{c}{b+c} \cdot \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c} \cdot \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b+c}$$

が成り立つ.以上から,$S_{\mathrm{PBC}} : S_{\mathrm{PCA}} : S_{\mathrm{PAB}} = a : b : c$ が従う. □

前の定理の証明にもあったが，辺の比についてもまとめておく．

定理． 仮定の状況において，次のように，３点 D, E, F を定める．

直線 AP と BC の交点を D，　直線 BP と AC の交点を E，　直線 CP と AB の交点を F．



このとき，次が成り立つ．

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=b+c:a$　　$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=a+c:b$　　$\mathrm{CP}:\mathrm{PF}=a+b:c$

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\ c\ :\ b$　　$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\ c\ :\ a$　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=\ b\ :\ a$

証明．前の定理の証明において，与式を，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ について解くことで，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$ と $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=b+c:a$ を証明した．他の４つの比についても，与式を，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ について解くことで，同様に証明できる．□

加重重心の座標についても次のような結果がある．

定理． 仮定の状況において，３点 A, B, C の座標をそれぞれ，$(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)$ とする．このとき，点 P の座標は，$\left(\dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{a+b+c},\dfrac{aa_2+bb_2+cc_2}{a+b+c}\right)$ である．

証明．点 D を上と同様に定める．５点 A, B, C, D, P の位置ベクトルをそれぞれ，$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d},\overrightarrow{p}$ とする．前の定理の結果から，点 D は線分 BC を，$c:b$ に内分する点なので，$\overrightarrow{d}=\dfrac{b\overrightarrow{b}+c\overrightarrow{c}}{b+c}$ が成り立つ．同様に，点 P は線分 AD を，$(b+c):a$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{p}=\frac{a\overrightarrow{a}+(b+c)\overrightarrow{d}}{a+b+c}=\frac{a\overrightarrow{a}+b\overrightarrow{b}+c\overrightarrow{c}}{a+b+c}$$

が成り立つ．ベクトル $\overrightarrow{a}$ は，$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ と成分表示できることなどから結果が従う．□