加重重心の拡張

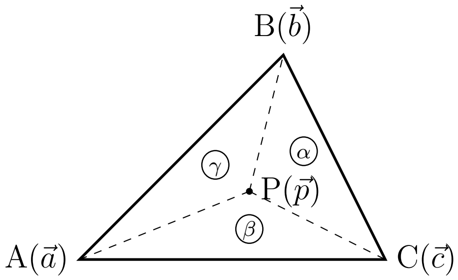
$\triangle$ABC と，その各辺または延長線上にない点 P の位置関係について考察する．以下では，4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{P}$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ で表し，$\triangle$ABC の面積をまた，$\triangle$ABC などと表す．

定理． $\alpha, \beta, \gamma > 0$ とする．$\triangle$ABC とその内部の点 P に対して，次の 3 条件は同値である：

(i). $\vec{p} = \dfrac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma}$,

(ii). $\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$,

(iii). $\triangle\mathrm{BPC} : \triangle\mathrm{CPA} : \triangle\mathrm{APB} = \alpha : \beta : \gamma$.



この定理の条件を満たす点 P は，三角形の各頂点に対応する重りを置いたときの重心の位置として解釈できるため，**加重重心**と呼ばれることがある[1]．本稿では，この結果を拡張して，点 P が $\triangle$ABC の外部にある場合も含めて考察する．まずは上の定理を（後のことを考えて少し一般的な形で）証明する．

証明．まずは，(i). と (ii). が同値であることを示す．$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a} - \vec{p}$ などが成り立つことに注意すると，(ii). の条件式は，次のように変形できる：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}} \\
\overrightarrow{0} &= \alpha(\vec{a} - \vec{p}) + \beta(\vec{b} - \vec{p}) + \gamma(\vec{c} - \vec{p}) \\
\vec{p} &= \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma}.
\end{aligned}$$

逆を辿ることで，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) が従う．

次に，(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す．まず，$\triangle$BPC の面積は，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}, \overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いて，

$$\triangle\mathrm{BPC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}})^2} \tag{1}$$

と表せる．条件式 (ii) の両辺のベクトルと，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \neq \vec{0}$ との内積を取ることにより，等式

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot (\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}) &= \overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{0} \\
\alpha\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \beta|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 + \gamma\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} &= 0 \\
\beta|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 &= -\gamma\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

が得られる．同様に，条件式 (ii) の両辺のベクトルと，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \neq \vec{0}$ との内積を取ることにより，等式

$$\gamma|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = -\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} \tag{3}$$

が得られる．等式 (2),(3) の両辺の積をとることにより，等式，

$$\begin{aligned}
\beta\gamma|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 &= (\gamma\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}})(\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}) \\
\beta\gamma\{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}})^2\} &= \alpha\gamma(\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}})(\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}) + \alpha^2(\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}})(\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}) + \alpha\beta(\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}})(\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}) \\
|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}})^2 &= \alpha^2\left\{\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\alpha} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\beta} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\beta} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\gamma} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\gamma} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

が得られる．

[1] https://gleamath.com/weighted-center/ を参照．

$$S=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\alpha}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\beta}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\beta}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\gamma}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\gamma}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\alpha}$$

とおき，上の結果を (1) に代入することにより，$\triangle\mathrm{BPC}$ の面積は，

$$\triangle\mathrm{BPC}=\frac{|\alpha|}{2}\sqrt{S} \tag{4}$$

と表せる．S の対称性に注目することで，同様にして，$\triangle\mathrm{CPA},\triangle\mathrm{APB}$ の面積が，

$$\triangle\mathrm{CPA}=\frac{|\beta|}{2}\sqrt{S},\qquad \triangle\mathrm{APB}=\frac{|\gamma|}{2}\sqrt{S} \tag{5}$$

と計算できることがわかる．$\alpha,\beta,\gamma>0$ だったので，(iii) が従う．

(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す．$\mathrm{P}(\vec{p})$ は，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部の点なので，$s+t<1$ を満たす正の実数 s,t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \vec{0}&=s(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ \vec{0}&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PC}}\end{aligned} \tag{6}$$

と表せる．$1-s-t,\ s,\ t>0$ なので，(ii) $\Rightarrow$ (iii) の結果を用いて，このとき，$\triangle\mathrm{BPC},\triangle\mathrm{CPA},\triangle\mathrm{APB}$ の面積比は，

$$\triangle\mathrm{BPC}:\triangle\mathrm{CPA}:\triangle\mathrm{APB}=1-s-t:s:t$$

である．条件 (iii) を仮定すると，この面積比が，$\alpha:\beta:\gamma$ なので，ある実数 k が存在して，

$$1-s-t=k\alpha,\quad s=k\beta,\quad t=k\gamma$$

と表せる．この表示を用いて，

$$\vec{p}=\frac{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}}{(1-s-t)+s+t}=\frac{k\alpha\vec{a}+k\beta\vec{b}+k\gamma\vec{c}}{k\alpha+k\beta+k\gamma}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

と表せるので，(iii) $\Rightarrow$ (i) が従う． □

次に，点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にある場合も含めて考察する．ただし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の各辺の延長線上にはないとする．まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は，平行ではないので，上の証明中の (6) と同様にして，このような点 P は，（正とは限らない）実数 α',β',γ' を用いて，等式

$$\alpha'\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta'\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma'\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}\qquad(\alpha',\beta',\gamma'\neq 0,\ \alpha'+\beta'+\gamma'\neq 0) \tag{7}$$

が成り立つ点として定めることができる[2]．さらに，上の (ii) $\Rightarrow$ (iii) の証明と同様にして，(4),(5) と同様の結果が得られるので，(7) を満たすような点 P に対して，

$$\triangle\mathrm{BPC}:\triangle\mathrm{CPA}:\triangle\mathrm{APB}=|\alpha'|:|\beta'|:|\gamma'|$$

が成り立つ．以上の考察から，点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にある場合（ただし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の各辺の延長線上にはない）を含めると，$\alpha,\beta,\gamma>0$ に対して，定理の条件 (iii) を満たすような点 P が複数存在することになるが，そのような点 P を定める等式は，

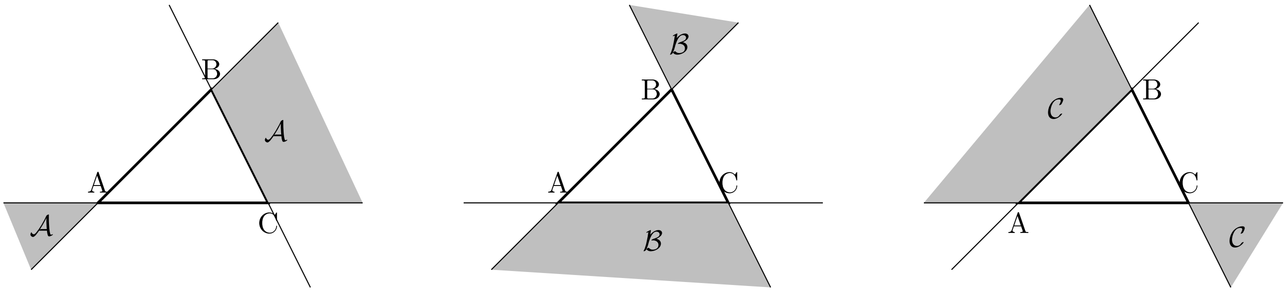
$$(\pm\alpha)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(\pm\beta)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(\pm\gamma)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}\qquad\text{（複合任意）} \tag{8}$$

の形であることがわかる．

---

[2]例えば，(6) の記号において，$\alpha'=1-s-t,\beta'=s,\gamma'=t$ とおけば良い．このとき $\alpha'+\beta'+\gamma'\neq 0$ である．さらに，点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の各辺またはその延長線上にはないという仮定から，$s,t\neq 0,\ s+t\neq 1$ なので，$\alpha',\beta',\gamma'\neq 0$ である．

続いて，等式 (8) の符号と点 P の存在領域について詳しく考える．まずは，$\triangle$ABC の外部を，下図のように，3 つの領域 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ に分類する：



このとき，$\alpha,\beta,\gamma>0$ に対して，例えば，等式 $-\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ $(-\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$ で定まる点 P は領域 $\mathcal{A}$ 上に存在する．なぜならば，この等式は，

$$\begin{aligned}\vec{0}&=-\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\gamma(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{-\alpha+\beta+\gamma}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma}\end{aligned}$$

と変形できるが，ここで，線分 BC を $\gamma:\beta$ に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であり，$\dfrac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}<0$ または，$1<\dfrac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}$ となるからである[3]．以上の考察から，点 P の存在範囲を制限すれば，$\triangle$ABC の外部においても，次のようにして，上の定理の条件 (iii) との一対一対応を作ることができる．条件 (i), (ii) は同値だったことと合わせて，次が成り立つ．

定理． $\alpha,\beta,\gamma>0$ とする．$\triangle$ABC とその<u>外部</u>（各辺の延長線を含まない）の点 P に対して，条件

$$\text{(iii)}.\ \triangle\,\mathrm{BPC}:\triangle\mathrm{CPA}:\triangle\mathrm{APB}=\alpha:\beta:\gamma$$

と，次の条件は同値である：

- 点 P が領域 $\mathcal{A}$ 上にあるとき；

$$(\mathrm{i}_{\mathcal{A}}).\ \vec{p}=\frac{-\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{-\alpha+\beta+\gamma},\qquad (\mathrm{ii}_{\mathcal{A}}).\ -\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}.$$

- 点 P が領域 $\mathcal{B}$ 上にあるとき；

$$(\mathrm{i}_{\mathcal{B}}).\ \vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha-\beta+\gamma},\qquad (\mathrm{ii}_{\mathcal{B}}).\ \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}.$$

- 点 P が領域 $\mathcal{C}$ 上にあるとき；

$$(\mathrm{i}_{\mathcal{C}}).\ \vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta-\gamma},\qquad (\mathrm{ii}_{\mathcal{C}}).\ \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}.$$

[3] $0<\beta+\gamma<\alpha$ なら $\dfrac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}<0$，$0<\alpha<\beta+\gamma$ なら $1<\dfrac{\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}$．